



Déconvolution aveugle et sismologie: estimation de la source sismique et des effets de site

Olivier Sebe

► To cite this version:

Olivier Sebe. Déconvolution aveugle et sismologie: estimation de la source sismique et des effets de site. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00010704

HAL Id: tel-00010704

<https://theses.hal.science/tel-00010704>

Submitted on 20 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER, GRENOBLE I
OBSERVATOIRE DES SCIENCES DE L'UNIVERS DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse de Doctorat

Présentée par

Olivier SÈBE

En vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I
Spécialité : Sciences de la Terre et de l'univers – Traitement du signal

Déconvolution aveugle et sismologie : estimation de la source sismique et des effets de site

Thèse soutenue le 20 juillet 2004, devant le jury composé de :

André HERRERO	Rapporteur	Chargé de recherche, INGV, Rome
Jean-Luc MARI	Rapporteur	Professeur, IFP, Paris
Jean-Louis LACOUME	examineur	Professeur, INPG, Grenoble
Ludovic MARGERIN	examineur	Chargé de recherche, LGIT, Grenoble
Frank SCHERBAUM	examineur	Professeur, Université de Potsdam
Pierre-Yves BARD	Directeur de thèse	Ingénieur en Chef, LCPC
Jocelyn GUILBERT	Co-directeur de thèse	Ingénieur-Chercheur, LDG CEA, Paris

Remerciements

Même s'il est clair que l'on continue à apprendre tout au long de sa vie, il est temps maintenant de mettre un point final à mes années estudiantines. Mais comment remercier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, d'une part, à l'élaboration de ce travail de thèse, et d'autre part, à mon épanouissement personnel. Comment énumérer l'indénombrable ? Comment mettre noir sur blanc la richesse de ces moments de vie et de joie partagés avec toutes les personnes et tous les amis que j'ai pu côtoyer jusqu'à aujourd'hui ? Je pense qu'il s'agit d'une « mission impossible », autrement plus impossible que la déconvolution aveugle... Alors je m'excuse tout de suite auprès des gens que je vais oublier. Qu'elles sachent, qu'elles ont toutes une place au fond de mon cœur.

Je voudrais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse : Pierre-Yves Bard et Jocelyn Guilbert. Merci à toi Pierre-Yves, pour ta confiance, ta disponibilité, tes conseils et ton écoute, surtout dans ce moment difficile qu'est la fin de thèse. Merci aussi pour ton courage et ta constance face au nombre incalculable de « faute d'autographes » des versions initiales de mon manuscrit de thèse. Merci à toi Jocelyn, pour avoir partagé avec moi ta passion du traitement du signal et de la sismologie, et pour toutes les discussions scientifiques, malheureusement trop rares, que nous avons pu avoir ensemble.

Mes remerciements iront aussi à Jean-Louis Lacoume et Ludovic Margerin pour leur disponibilité, et pour toutes les discussions très enrichissantes que nous avons pu avoir ensemble. Par la même occasion, je remercie l'ensemble des membres du Jury, notamment les rapporteurs André Herrero et Jean-Luc Mari, pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail de thèse, ainsi que Frank Scherbaum qui a étudié avec attention mon manuscrit malgré la barrière de la langue.

J'aimerais remercier aussi trois personnes grâce à qui j'ai pu accéder à une vision plus « fondamentale » du traitement du signal. Je pense notamment à François Glangeaud, pour ses critiques des méthodes actuellement utilisées en risque sismique. Je pense aussi à Gilles Fleury pour son cours d'estimation spectrale, ainsi qu'à Dominique Garreau, pdg de « Kurtosis Ingénierie », Start-up en traitement du signal où j'ai travaillé pendant 1 an.

Cette thèse n'aurait bien sûr pas été ce qu'elle est, sans l'utilisation de données sismologiques de qualité. Je tiens à remercier tout d'abord Estelle Schisselle pour m'avoir envoyé les réponses de capteur des réseaux ARCESS et FINESS. Elles m'ont permis de valider la qualité des techniques que j'étais en train de développer. Un Grand merci aussi à Frank Scherbaum et Wolfgang Bruestle pour m'avoir fourni les données allemandes relatives au tremblement de terre de Rambervillers. Je tiens aussi à faire part de ma reconnaissance à Philippe Gueguen quant à l'utilisation des enregistrements du RAP. Enfin même si faute temps, les résultats de l'étude des méthodes de déconvolution aveugle multicanaux n'apparaissent pas dans ce

manuscrit, je voudrais aussi remercier Ralph Archuleta et Jamison Steidl pour m'avoir permis de travailler sur les enregistrements en Forage de Garner Valley (Californie).

L'outil informatique est devenu aujourd'hui un outil incontournable de la recherche scientifique. Mon travail de thèse aurait d'ailleurs été irréalisable sans les moyens de calculs performants du LGIT et de l'Observatoire. Je voudrais donc remercier toute l'équipe informatique et notamment Catherine Paquegnat, Ghislain Escorne et Françoise Roch pour leur travail de qualité ainsi que pour leur disponibilité et leur aide.

Je tiens à remercier tous les étudiants et tout le personnel de la maison des géosciences qui ont participé à rendre ces quelques années passées à Grenoble très agréables. Je pense entre autre à l'équipe de Foot (alias, les maniaques du but en or), aux étudiants non-footeux : Nath, Florent, Ombeline, François, etc..., ainsi qu'aux secrétaires France, Martine (promis je ne ramène plus de chocolat Suisse : noix de coco & ananas), Karine et Jacques.

Je voudrais remercier plus particulièrement 3 drôles de Dame : Mumu (agent triple S), Clacla (Fraulein General, alias Ioana) et Sissi (nom de code : Gertrude). Elles ont été pendant ces quelques années de thèse, des muses de joie et de bonne humeur. Je tiens aussi à remercier toute la fine équipe : Nono pour les soirées volley de folie ; Manu, capable de transformer un réchaud à essence en base de lancement de la navette américaine (Allo, Houston,... Nous avons un problème...) ; LauLau pour les sorties nocturnes luge extrême ; le Rascal pour ces techniques de plongée peu conformiste (âme sensible s'abstenir) ; et enfin Mica alias Michael Knight, il a juste repeint sa voiture en rouge.

Je tiens à remercier un ami de toujours Jean-Pierre, sans qui je n'aurais peut-être pas connu l'existence de l'EOST. Je pense aussi à mes amis « Strasbourgeois » : Mathieu (l'homme qui plonge dans les ascenseurs) et Stéphane (vive l'auvergne !), ainsi qu'à mes autres amis « grenoblois » : Marianne (heureuse participante du Grand Jeu : « cherche ton poster dans les rues de San-Fransisco »), Cécile, Céline, Marielle (co-bureau durant ma période de crise de fin de thèse...), Nico, Vincent, Yvi (le breton qui ne sort jamais sans son Bilig) et François (signe distinctif : se fait appeler Sergio).

Enfin, je dédie cette thèse à mes parents, grand-parents, mon frère et ma sœur, ainsi qu'à toute ma famille, pour leur soutien, leur affection et la confiance qu'ils m'ont toujours accordé quelques soient les circonstances. Merci à vous tous sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est aujourd'hui.



Résumé

Déconvolution aveugle et sismologie : estimation de la source sismique et des effets de site.

Depuis maintenant une vingtaine d'années, l'essor des télécommunications numériques a généré toute une panoplie de méthodes dites de déconvolution aveugle. Celles-ci permettent de séparer les différentes composantes d'un produit de convolution sans en avoir aucune connaissance a priori. L'objectif de ce travail de thèse a été d'étudier leurs modalités d'applications à la sismologie, afin notamment, d'estimer la fonction source du mouvement sismique ou les effets de site. L'adaptation de la déconvolution à phase minimale au signal de coda, nous a permis d'identifier les fonctions sources de deux types d'événements sismiques : l'explosion sous-marine du Kursk (12/08/2000), d'une part et le séisme de Rambervillers (22/02/2003, $M_l=5.4$) d'autre part. Nous avons ainsi pu estimer respectivement la profondeur, la charge de l'explosion ainsi que la durée et le moment sismique du séisme. Grâce à cette méthode, nous avons montré qu'il est aussi possible d'estimer les effets de site en différentes stations du RAP pourtant séparées de plusieurs dizaines de kilomètres. Nous avons ensuite appliqué les méthodes de déconvolution aveugle par statistique d'ordre supérieur aux signaux de coda stationnarisés du séisme de Rambervillers. Ces méthodes ont l'avantage de supprimer l'hypothèse de phase minimale, contraignante et théoriquement non justifiée en sismologie. La fonction source obtenue grâce à la tricorrélation moyennée sur l'ensemble du réseau, est très similaire à celle obtenue après déconvolution par fonction de Green Empirique. Les exemples traités montrent que les méthodes développées ici sont très prometteuses et mériteraient d'être appliquées à de nombreux autres jeux de données.

Mots clés : sismologie, déconvolution aveugle, statistiques d'ordre supérieur, tricorrélation, déconvolution aveugle multicanaux, phase minimale, stationnarisation, coda sismique, fonction source sismique, effet de site.

Abstract

Blind deconvolution and seismology: seismic source time function and site effect assessment.

For around twenty years, the signal processing community has developed, for digital communication, different methods of blind deconvolution making it possible to retrieve the unknown convolutive components of one known signal. In this work, we study the way to apply these blind deconvolution technics to seismology in order to estimate the source function or the site effects from only a small numbers of surface seismic records. Based on the theory of coda wave and on a minimum phase deconvolution method, we develop an original algorithm for coda waves. We first apply it to the records of the Kursk's underwater explosion (12/08/2000). After showing that such an explosion is roughly a minimum phase source, we estimate, from the obtained minimum phase source function of the Kursk, the depth and the power of the explosion. We then apply this method to the Rambervillers's earthquake (22/02/2003, $M_l=5.4$). From the estimated minimum phase source time function, we retrieve not only the duration and the seismic moment but also the site effect at recording stations located several kilometers away from one another. In order to release the minimum phase assumption, we use a higher order statistic blind deconvolution on the stationnarized coda signal. From the multi-station stacked tricorrelation, we obtain a source time function consistent with the source function estimated after deconvolution by empirical Green function, which is in agreement with the minimum phase seismic source function.

These first results show that these methods seem to be very powerful, and they should be applied on a set of records of different events from different stations through global inversion scheme.

Keywords: Seismology, blind deconvolution, higher order statistics, tricorrelation, minimum phase, stationnarization, coda waves, source time function, site effects.

Table des Matières

Déconvolution aveugle et sismologie : estimation de la source sismique et des effets de site..	1
Remerciements	3
Résumé	5
Abstract	7
Table des Matières	9
Chapitre I Introduction	13
Chapitre II De la convolution à la déconvolution aveugle	19
II.1 Convolution et systèmes linéaires invariants dans le temps	19
II.1.1 Systèmes et signaux à temps discret ou continu	19
II.1.2 La réponse impulsionnelle associée aux systèmes linéaires	21
II.1.3 Les systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT)	21
II.1.4 Quelques propriétés des transformées de Fourier des signaux échantillonnés	23
II.1.5 Description paramétrique des SLIT continus ou discrets	26
II.1.6 Quelques remarques sur les systèmes discrets et l'équation aux différences	27
II.1.7 Caractérisation et stabilité des SLIT discrets	28
II.1.8 Le bestiaire associé à l'équation aux différences finies	36
II.1.9 Lien continu-discret	37
II.2 La déconvolution	40
II.2.1 Définition du problème	40
II.2.2 Formulation temporelle de la déconvolution	40
II.2.3 Formulation fréquentielle de la déconvolution	42
II.2.4 Un problème inverse mal posé	42
II.2.5 Méthodes de régularisation	44
II.3 La déconvolution aveugle	47
II.3.1 Un problème inverse mal posé et « très » sous-déterminé	47
II.3.2 La déconvolution à phase minimale	49
II.3.3 Conclusions et perspectives	64
Chapitre III Estimation de la fonction source de l'explosion du Kursk par déconvolution à phase minimale	67
III.1 Une explosion sous-marine à la loupe	68
III.1.1 Qu'est ce qu'une explosion ?	68
III.1.2 Ondes de pression générées par une explosion sous-marine	68
III.2 La fonction source sismique associée à une explosion sous-marine	71
III.2.1 Le champ d'ondes sismiques généré par une explosion sous-marine	71
III.2.2 Ondelette source générée par l'oscillation de la bulle	72
III.2.3 Caractère phase minimale de l'ondelette source	74
III.3 Contexte général de l'étude	82
III.3.1 Caractéristiques et situation géographique	82

III.3.2 Les signaux utilisés	83
III.3.3 Pourquoi travaille-t-on à distance régionale ?	83
III.4 Ondelette à phase minimale des différentes phases sismiques des sismogrammes du Kursk	84
III.4.1 Non stationnarité d'un sismogramme	84
III.4.2 Déconvolution à phase minimale des différentes phases sismiques	86
III.5 Modélisation du champ d'onde de coda	90
III.5.1 Modèle de diffusion simple	91
III.5.2 Le modèle diffusif	93
III.5.3 La théorie du transfert radiatif	94
III.6 Correction de l'effet de la propagation sur les ondes de coda	95
III.6.1 Estimation de Q_{coda}	97
III.6.2 Correction du terme de transport du champ d'ondes de coda	100
III.7 Estimation de l'ondelette source « corrigé » par déconvolution à phase minimale ...	104
III.8 Estimation de la fonction source associée aux variations du volume de la bulle $\dot{V}(t)$	106
III.8.1 Profondeur de l'explosion	106
III.8.2 Déréverbération de l'ondelette source	107
III.9 Estimation de la charge de l'explosion	109
III.10 Stabilité spatiale de l'ondelette source estimée par déconvolution à phase minimale	110
III.11 Conclusion	116
Chapitre IV Estimation de la fonction source du séisme de Rambervillers par déconvolution à phase minimale	119
IV.1 Introduction	119
IV.2 Quelques rappels de sismologie	119
IV.2.1 Le champ d'ondes élastiques créé par une dislocation	120
IV.2.2 Le champ d'ondes élastiques créé par un séisme en champ lointain	121
IV.3 Estimation de la fonction source d'un séisme	127
IV.3.1 Les méthodes actuelles d'estimation de la fonction source du mouvement sismique	127
IV.3.2 Et l'estimation spectrale dans tout ça?	129
IV.3.3 Avec quelle précision peut-on résoudre l'histoire du glissement sur la faille ...	132
IV.4 Les modélisations cinématiques de la source sismique.	133
IV.4.1 Le modèle de source ponctuelle : la fonction source temporelle (source time function)	133
IV.4.2 L'approximation de Fraunhofer	134
IV.4.3 Le modèle d'Haskell	135
IV.4.4 Le modèle de Brune (Brune, 1970; Brune, 1971)	138
IV.5 Caractère phase minimale de la fonction source sismique	139
IV.5.1 Forme générale des ondelettes sources synthétiques des modèles cinématiques ou quasi-dynamiques	139
IV.5.2 Caractère phase minimale d'une ondelette positive et symétrique	140
IV.5.3 Etude des différences entre une ondelette source sismique et son équivalent à phase minimale	143
IV.6 Les données et le contexte sismologique de l'étude	146
IV.6.1 Le séisme de Rambervillers/Saint-Dié-en-Vosges (88)	146
IV.6.2 Les stations sismologiques retenues	147
IV.7 Détermination Q_{coda}	148
IV.8 Choix de la fenêtre de coda traitée	152

IV.9 Estimation de l'ondelette source à phase minimale du séisme de Rambervillers.....	155
IV.9.1 Algorithme d'estimation	155
IV.9.2 Calcul du taux de moment sismique	157
IV.9.3 Fonction source à phase minimale du séisme de Rambervillers.....	159
IV.9.4 Comparaison avec la fonction source estimée par fonction de Green Empirique	166
IV.9.5 Directivité et Moment sismique des fonctions sources à phase minimale.....	169
IV.9.6 Vitesse de rupture et chute de contrainte	172
IV.10 Extraction des effets de site	174
IV.10.1 Qu'est ce que les effets de site ?	174
IV.10.2 Les méthodes d'estimation.....	174
IV.10.3 Le modèle 1D.....	175
IV.10.4 Objectifs de l'étude des effets de site.....	176
IV.10.5 Données utilisées.....	178
IV.10.6 Les Résultats	180
IV.11 Conclusions et perspectives.	185
Chapitre V Déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur du séisme de Rambervillers	187
V.1 Introduction	187
V.2 Signal aléatoire et statistiques : quelques rappels	190
V.2.1 Processus aléatoire et ergodisme	190
V.2.2 Moments et cumulants.....	192
V.2.3 Variables aléatoires multidimensionnelles	193
V.2.4 Variable aléatoire Gaussienne à N dimensions	194
V.3 Multicorrélation, Multispectre et phase.....	195
V.3.1 Cas des signaux aléatoires	195
V.3.2 Cas des signaux transitoires	197
V.3.3 Relation phase/multispectre (signal transitoire)	197
V.3.4 Propriétés de symétrie des multicorrélations et des multispectres	198
V.4 Estimation de la phase de l'ondelette source par statistique d'ordre supérieur.....	199
V.4.1 Filtrage et statistique d'ordre supérieur.....	199
V.4.2 Condition d'identification de $s(t)$ et blancheur de la réflectivité de coda $g(t)$	200
V.4.3 Pourquoi utiliser les cumulants plutôt que les moments ?	202
V.5 Application aux données réelles.....	202
V.5.1 Les propriétés statistiques du champ d'ondes de coda : $u(t)$ est-il Gaussien ?	203
V.5.2 Estimation des statistiques d'ordre supérieur	206
V.5.3 Calcul de la bicorrélation	207
V.5.4 Calcul de la tricorrélation	210
V.5.5 Extraction de l'ondelette source du séisme de Rambervillers de la tricorrélation.	216
V.6 Méthode d'optimisation : maximisation du Kurtosis	218
V.6.1 Principe théorique de la méthode	218
V.6.2 Pouvoir d'identification de la déconvolution aveugle par maximisation du kurtosis	222
V.6.3 Application aux signaux de coda stationnarisée du séisme de Rambervillers	225
V.7 Conclusions	228
Chapitre VI Conclusion.....	231
VI.1 Quelques étapes décisives.....	231
VI.1.1 Stationnarisation du signal de coda.....	231
VI.1.2 Ecart à la Gaussianité de la réflectivité de coda.....	232

VI.2 Conditions générales de mise en œuvre de la déconvolution aveugle	232
VI.2.1 Des signaux large-bande... ..	232
VI.2.2 Durée des signaux traités... ..	232
VI.2.3 Rapport signal/Bruit... ..	233
VI.3 Les résultats de l'application aux données réelles	233
VI.3.1 Le Kursk... ..	233
VI.3.2 La fonction source du séisme de Rambervillers... ..	234
VI.3.3 Quelques effets de site... ..	234
VI.4 Perspectives.....	234
Références bibliographiques	237

Chapitre I Introduction

Les objectifs de la sismologie sont multiples, comme par exemple de déterminer la structure de la terre ou d'en comprendre la dynamique. Mais, bien évidemment, son rôle est aussi de nous permettre de minimiser le pouvoir destructeur des tremblements de terre. Actuellement, en l'absence de méthode de prédiction fiable des séismes, le meilleur moyen à notre disposition, pour nous en protéger, est la prévention. Ainsi, plutôt que de déterminer quand et où va avoir lieu un séisme, on va plutôt s'intéresser à déterminer comment cela va avoir lieu en estimant les caractéristiques du mouvement sismique, en terme d'amplitude et de contenu fréquentiel. En sismologie, la modélisation du mouvement du sol $u(t)$, généré par un tremblement de terre, une explosion ou tout autre sorte d'événement sismique, est basée sur la théorie des systèmes linéaires et s'exprime souvent comme la convolution de 3 termes : un terme de source $S(t)$, un terme de propagation $P(t)$ et un terme d'effet de site $H(t)$:

$$u(t) = S(t) * P(t) * H(t) \quad (\text{I-1})$$

En plus du fait qu'il n'est pas toujours facile de séparer $P(t)$ et $H(t)$, cette équation n'est en toute rigueur qu'une approximation, dont on précisera les conditions de validité dans le Chapitre 4. Ainsi, faire de la prévention consistera à être capable de déterminer et d'évaluer chacun de ces trois termes. Le sismologue a ainsi développé toute une panoplie de méthodes d'évaluation des différents termes de l'équation (I-1). Ces méthodes consistent généralement à déconvoluer le signal $U(t)$ par une estimation d'au plus deux de ces trois termes (source, propagation et site).

Ainsi, cette estimation des termes de droite de l'équation (I-1), peut être obtenue de manière expérimentale comme notamment lors de l'estimation de la fonction source $S(t)$ par déconvolution par fonction de Green empirique (Hartzell, 1978), laquelle nous donne une estimation « expérimentale » du terme $P(t)*H(t)$. De même, les effets de site $H(t)$ peuvent être

estimés par déconvolution¹ de $U(t)$ par le signal enregistré en un site de référence au rocher (sans effet de site) qui nous donne a priori une estimation du signal incident $S(t)*P(t)$. Cependant, comme nous le rappellerons de manière plus exhaustive dans ce travail de thèse (Chapitre IV), les conditions à respecter pour une bonne qualité de ces estimations sont en pratique difficiles à vérifier.

Une autre estimation d'une partie des différents termes de l'équation (I-1) peut être aussi obtenue de manière numérique. Ainsi, à partir de la connaissance de la structure de la terre, il est possible de calculer des estimations de $P(t)$ et $H(t)$ en utilisant des méthodes de simulation du champ d'ondes sismiques telles que la méthode des nombres d'onde discrets (Bouchon et Aki, 1977) par exemple. La fonction source $S(t)$ est alors estimée par déconvolution de $U(t)$ par $P(t)$ et $H(t)$. Cependant, la structure de la terre n'est souvent connue qu'avec une précision limitée ne nous permettant pas d'identifier les caractéristiques précises de la fonction source $S(t)$.

Ainsi, que ce soit dans le cadre du risque sismique, où l'on cherche à identifier par exemple les effets de site $H(t)$, ou que ce soit dans le cadre du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires TICE où l'on cherche à identifier $S(t)$ (discrimination d'événements sismiques), il est donc nécessaire d'avoir une bonne connaissance d'au moins une partie des termes du membre de droite de l'équation (I-1). Or comme on vient de le voir, c'est loin d'être toujours le cas. Ainsi, tout l'enjeu de ce travail de thèse est de déterminer dans quelle mesure il est possible de séparer du signal enregistré $U(t)$ les différentes contributions de chacun des termes de source, de propagation et d'effets de site de l'équation (I-1) sans forcément les connaître. Dans ce cas on ne parle plus de déconvolution mais plutôt de déconvolution aveugle.

En traitement du signal, grâce entre autre au développement des télécommunications, comme la téléphonie mobile, de nombreuses méthodes de déconvolution aveugle ont vu le jour : déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur (HOS) (Lii et Rosenblatt, 1982; Mendel, 1991; Tugnait et al., 2000) ou déconvolution aveugle multi-canaux (Abed-meraim et al., 1997; Tong et Perreau, 1998).

D'une façon analogue à la sismologie, dans le domaine des télécommunications, un signal reçu $y(t)$ peut-être considéré comme la convolution du signal émis $x(t)$ et du canal de transmission $h(t)$. Ces méthodes de déconvolution aveugle ont donc pour objectif d'identifier,

¹ En toute rigueur, plutôt qu'une déconvolution il s'agit d'un simple rapport spectral. En raison de l'incohérence des signaux sismologiques en deux stations éloignées, la phase est souvent ignorée. Mais nous y reviendrons.

seulement à partir du signal enregistré au poste de réception, le signal émis et le canal de transmission. Ainsi, en l'absence d'une connaissance fine de ces deux signaux, leur séparation est basée sur leurs propriétés statistiques ou leurs caractéristiques physiques connues a priori.

Même si à l'époque il n'était pas encore question de déconvolution aveugle à proprement parler², historiquement, c'est Robinson (Robinson, 1957; Robinson, 1967) qui proposa une première méthode de déconvolution « extra lucide » appelée déconvolution prédictive. Cette méthode de déconvolution est basée sur deux hypothèses. La première est que l'un des deux signaux soit assimilable à un processus aléatoire, la seconde est que l'autre possède la propriété d'être à phase minimale. Basée sur les statistiques d'ordre 2, cette méthode développée pour le compte de la sismique pétrolière a pour objectif d'améliorer la résolution des profils sismiques (Wood et Treitel, 1975).

Plus tard, les travaux de Brillinger, Rosenblatt et Lii (Brillinger, 1965; Brillinger et Rosenblatt, 1967a; Lii et Rosenblatt, 1982) ont montré, que les statistiques d'ordre supérieur à 2 étaient susceptibles de comporter toute l'information nécessaire à la séparation aveugle, et qu'ainsi l'hypothèse de phase minimale était donc inutile. Ils ont ainsi donné naissance aux méthodes de déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur mono-signal.

Cependant, ces méthodes sont difficiles à mettre en œuvre car, d'une part elles nécessitent des signaux aléatoires stationnaires longs, et d'autre part, l'évaluation et l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur est plus complexe et souvent considérée comme inappropriée à l'étude de signaux aléatoires physiques, classiquement modélisés en première approximation comme des signaux Gaussiens dont les propriétés statistiques d'ordre supérieur sont nulles. Ainsi, beaucoup plus récemment, les travaux de (Xu et al., 1995) ont donné naissance à une nouvelle classe de méthodes de déconvolution aveugle pouvant utiliser des signaux transitoires : la déconvolution aveugle multicanaux. Le principe de séparation n'est plus basé sur les propriétés statistiques d'ordre supérieur des signaux mis en jeu, mais plutôt sur la redondance de l'information du signal « source » émis au travers de leurs propriétés statistiques d'ordre 2 : corrélations.

L'objectif de ce travail de thèse est de déterminer comment on peut adapter et appliquer aux signaux sismologiques ces méthodes de déconvolution aveugle, initialement développées pour les télécommunications ou la sismique pétrolière. Par conséquent, une autre question à laquelle nous devons nous intéresser sera de savoir si les critères mathématiques sur lesquels

² En toute rigueur les méthodes de déconvolution aveugle sont celles qui ne font a priori aucune hypothèse sur la phase des signaux à identifier.

sont basées ces méthodes de déconvolution aveugle, sont adaptés aux propriétés physiques et à la nature des signaux sismologiques. Ces **critères mathématiques** peuvent-ils vraiment nous permettre de séparer les différentes **contributions physiques** de l'équation (I-1) ? Ou bien, quelles sont les parties d'un sismogramme qui vérifient le mieux les différentes hypothèses mathématiques sur lesquelles sont basées la déconvolution aveugle ? Ces questions sont d'autant plus légitimes que les méthodes de déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur nécessitent des signaux aléatoires longs et stationnaires alors que les sismogrammes sont plutôt des signaux transitoires non stationnaires.

Ainsi, d'une façon analogue au processus historique de mise en place de ces méthodes, nous avons tout d'abord commencé par mettre en œuvre la déconvolution à phase minimale des signaux sismologiques (équivalent de la déconvolution prédictive en ce qui concerne les conditions d'extraction des signaux). Forts de cette expérience et des enseignements que nous en avons tirés quant à l'application de ces méthodes (stationnarisation du signal de coda), nous avons abordé les méthodes de déconvolution aveugle proprement dite telle que la déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur.

Ainsi, dans le chapitre 2, nous rappellerons tout d'abord, les différents modèles numériques associés aux opérations de convolution, de filtrage linéaire et de déconvolution. Nous présenterons ensuite les principes et les différentes méthodes de déconvolution « aveugle » à phase minimale.

Le troisième chapitre traitera de l'estimation de la fonction source de l'explosion sous-marine du Kursk (sous-marin russe) par déconvolution à phase minimale. Nous vérifierons tout d'abord que la fonction source d'une explosion sous-marine peut-être considérée dans une certaine mesure comme une ondelette à phase minimale. Ensuite, nous nous intéresserons à la vérification de la seconde hypothèse de mise en œuvre de cette méthode, à savoir le caractère aléatoire, stationnaire et décorrélé de la fonction de Green. Nous verrons que la partie du sismogramme la plus proche de ce type de signal est la coda des ondes P. Nous montrerons par ailleurs que grâce à la théorie des ondes de coda (Aki et Chouet, 1975) et à un algorithme de déconvolution non-stationnaire, nous sommes capables d'extraire l'ondelette source du mouvement sismique de la coda des ondes Lg.

Dans le quatrième chapitre, après avoir étudié le caractère phase minimale de la fonction source associée à une dislocation, nous appliquerons l'algorithme de déconvolution à phase minimale du signal de coda Lg, développé au chapitre 3, aux enregistrements sismiques du séisme de Rambervillers. Nous nous intéresserons par ailleurs à l'utilisation de cette méthode

afin d'estimer les effets de site en 3 stations accélérométriques du RAP à partir des enregistrements du séisme de Rambervillers.

L'expérience acquise lors de l'application de la déconvolution à phase minimale, nous a permis d'identifier les modalités d'application des méthodes de déconvolution aveugle mono-signal. Ainsi, dans le cinquième chapitre, après avoir rappelé les grandes lignes de la théorie associée aux méthodes de déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur, nous avons appliqué ces méthodes aux signaux de coda stationnarisée du séisme de Rambervillers. Nous nous sommes donc intéressés aux caractéristiques des statistiques d'ordre supérieur du signal de coda stationnarisée, ainsi qu'à celle de la « réflectivité de coda » associée.

Chapitre II De la convolution à la déconvolution aveugle

L'objectif de ce chapitre, outre qu'il va nous présenter la méthode de déconvolution à phase minimale qui est en quelque sorte une méthode de déconvolution « semi-aveugle », va nous permettre de rappeler les principales notions théoriques de traitement du signal qui nous ont été utiles tout au long de ce travail. Nous espérons que ce chapitre donnera, aux personnes non familières avec ces notions, toutes les informations nécessaires à la bonne compréhension de ce travail de thèse.

II.1 Convolution et systèmes linéaires invariants dans le temps

Avant d'aborder le problème inverse associé à la déconvolution aveugle nous allons nous intéresser tout d'abord au problème direct : la convolution.

II.1.1 Systèmes et signaux à temps discret ou continu

La plupart des signaux que nous percevons sont altérés, modifiés non seulement par les milieux qu'ils traversent, mais aussi par nos moyens de perception. Par exemple, deux étoiles proches mais distinctes, observées au travers d'un télescope, ne pourront être identifiées comme étant deux entités distinctes que si elles sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, c'est-à-dire si elles sont éloignées d'une distance supérieure à la résolution de l'appareil. De même en sismologie, la réponse d'un sismomètre à un choc très bref ne donnera jamais en sortie un signal électrique très bref mais plutôt un signal oscillant, certes transitoire, mais de durée non négligeable comparée à celle du signal d'entrée.

Dans ces deux exemples, un signal originel (étoile, coup de marteau) a été modifié, transformé par un système physique (télescope, sismomètre) qui nous donne finalement en sortie un signal différent du signal originel.

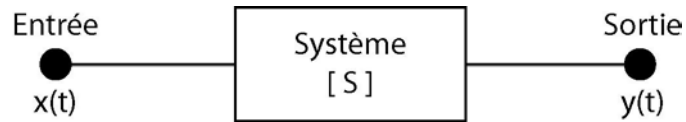


Figure II-1 : Modèle systémique de la relation entre deux signaux

De façon générale un système peut être considéré comme un opérateur qui, à un ou plusieurs signaux d'entrée $x(t)$, fait correspondre, moyennant quelques transformations physiques ou mathématiques, un ou plusieurs signaux de sortie $y(t)$ (Figure II-1). Un système va être caractérisé par le nombre et le type de signal mis en jeu : continu ou discret, ainsi que par le type de transformation qu'il leur fait subir.

La plupart des signaux physiques qui nous entourent, sont des signaux continus, dit analogiques. Cependant, avec l'avènement de l'informatique et des puissances de calcul phénoménales qu'elle nous fournit aujourd'hui, l'analyse analytique classique des signaux analogiques a cédé la place à une analyse numérique de signaux discrets. En effet, comme nous l'a montré Shannon en 1949 (Shannon, 1949; Shannon, 1998), un signal analogique ne comportant pas de fréquences supérieures à F_{\max} , peut être représenté, sans perte d'information, par une séquence discrète de valeurs du signal analogique prises à des instants réguliers nT_e avec $n \in \mathbb{Z}$, si et seulement si la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$ du signal numérique est au moins supérieure à $2F_{\max}$:

$$y(t) \approx y(n) \Leftrightarrow F_e \geq 2F_{\max} \quad (\text{II-1})$$

F_e et T_e sont respectivement appelés fréquence et pas d'échantillonnage.

Même si en pratique, modéliser un signal analogique par une séquence discrète n'est qu'une approximation, puisque les signaux réels ne sont que rarement à bande limitée, on peut tout de même reconstruire le signal analogique à partir de sa version discrétisée moyennant une certaine erreur que l'on cherchera à rendre la plus faible possible (Slepian, 1976; Unser, 2000).

Enfin, les méthodes que nous allons utiliser dans ce travail de thèse sont pour la plupart des méthodes numériques sur des signaux discrets ne possédant généralement pas d'équivalent analogique. Ainsi grâce aux progrès de l'informatique, notamment en terme de puissance de calcul, et grâce à l'utilisation de signaux numériques, nous allons appliquer des traitements sur les signaux sismiques qui nous auraient été impossibles à mettre en œuvre il y a une vingtaine d'année. Dans la suite de notre présentation, nous utiliserons donc essentiellement une formulation numérique des diverses équations que nous allons utiliser.

II.1.2 La réponse impulsionnelle associée aux systèmes linéaires.

En physique, il existe un grand nombre de situations pour lesquelles on peut appliquer le principe de superposition (linéarité). Ainsi on appelle *systèmes linéaires*, l'ensemble des systèmes caractérisés par une relation entrée-sortie de type linéaire, vérifiant :

$$S[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha S[x_1(t)] + \beta S[x_2(t)] \quad S[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha S[x_1(n)] + \beta S[x_2(n)] \quad (\text{II-2})$$

Bien évidemment, en pratique, aucun système n'est rigoureusement linéaire. Néanmoins, pour peu que l'on s'intéresse à un domaine D de variation limité de l'espace des phases du système (entrée-sortie), on peut souvent procéder à une linéarisation autour d'un point de D appelé aussi point de fonctionnement. Par exemple, un sismomètre aura un comportement linéaire tant qu'il ne sera pas saturé.

Comme on peut le trouver dans les ouvrages classiques de traitement du signal tel que (Picinbono, 1998), les systèmes qui présentent une telle propriété de linéarité, sont caractérisés par la relation entrée-sortie :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t, \theta) x(\theta) d\theta \quad y(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(m, n) x(n) \quad (\text{II-3})$$

$R(t, \theta)$ et $R(m, n)$ sont appelées **réponses impulsionnelles**, c'est-à-dire la réponse du système à une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Ces deux réponses sont **non stationnaires** puisqu'elles dépendent toutes deux de l'instant t d'observation du signal de sortie $y(t)$.

II.1.3 Les systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT)

II.1.3.1 L'équation de convolution

Pour certain de ces systèmes linéaires, suivant l'échelle de temps où l'on travaille, on peut faire l'hypothèse que ses caractéristiques restent constantes. Ainsi ces systèmes **linéaires invariants dans le temps SLIT** ont un noyau $R(t, \theta)$ qui ne dépend que de la différence $t - \theta$, soit :

$$R(t, \theta) = h(t - \theta) \quad (\text{II-4})$$

La relation entrée-sortie de tels filtres linéaires peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\theta)x(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta)h(\theta)d\theta & y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(m-n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m-n)h(n) \\
 &= [h * x](t) = [x * h](t) & &= [h * x](m) = [x * h](m)
 \end{aligned} \tag{II-5}$$

Cette opération est appelée convolution et se note souvent simplement $h * x$ ou $x * h$, la variable temporelle étant sous-entendue. Ainsi, tout filtre SLIT est complètement déterminé par la connaissance de sa **réponse impulsionnelle** $h(t)$, qui joue un rôle de pondération des entrées passées (partie causale, $h(t) \ t > 0$), et futures (partie anticausale, $h(t) \ t < 0$).

En ce qui concerne le traitement des signaux numériques $x(n)$, on distingue deux types de filtre suivant le support de sa réponse impulsionnelle :

- les filtres à **Réponse Impulsionnelle Finie RIF**, dont la réponse impulsionnelle est nulle en dehors d'un certain intervalle de longueur T ou comportant L+1 échantillons.

Dans ce cas les équations de convolution (II-5) sont de la forme :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{t_0}^{t_0+T} x(t-\theta)h(\theta)d\theta & y(m) &= \sum_{n=k_0}^{k_0+L} x(m-n)h(n)
 \end{aligned} \tag{II-6}$$

- les filtres à **Réponse Impulsionnelle Infinie IIR**, dont la réponse impulsionnelle s'étend sur un intervalle non borné.

L'implantation de tels filtres IIR sur des systèmes numériques nécessiterait de prendre en considération un nombre infini de valeurs numériques. Ils ne pourront donc être programmés qu'au prix d'une certaine approximation consistant à n'utiliser qu'un nombre fini de valeurs numériques. Néanmoins nous verrons que la sortie d'une certaine sous classe des filtres IIR : les filtres autoregressifs AR ou ARMA est calculable sans approximation.

II.1.3.2 L'opération de convolution en domaine spectral

Le **théorème de Plancherel** établit une dualité parfaite entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel en montrant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple³ et réciproquement :

³ Le lecteur pourra s'en convaincre assez aisément en calculant $TFr\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m-n)h(n)\right)$ procédant à un changement de variable et une factorisation.

$$\begin{aligned}
 y(t) = [h * x](t) &\stackrel{TF}{\Leftrightarrow} Y(\nu) = H(\nu)X(\nu) \\
 y(n) = [h * x](n) &\stackrel{TFR}{\Leftrightarrow} Y(\lambda) = H(\lambda)X(\lambda)
 \end{aligned}
 \tag{II-7}$$

où $Y(\nu)$, $H(\nu)$, $X(\nu)$ sont les transformées de Fourier des signaux $y(t)$, $h(t)$ et $x(t)$ respectivement. $Y(\lambda)$, $H(\lambda)$, $X(\lambda)$ correspondent quant à elles, aux transformées de Fourier en fréquences réduites des signaux échantillonnés $y(n)$, $x(n)$ et $h(n)$. $H(\nu)$ et $H(\lambda)$ sont alors appelés gain complexe du filtre. La Transformée de Fourier en fréquences réduites (TFR) est l'analogue pour les signaux numériques de la transformée de Fourier des signaux continus :

	Transformée de Fourier	Transformée de Fourier en fréquences réduites	
Directe	$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$	$X(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i2\pi\lambda n}$	(II-8)
Inverse	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$	$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\lambda) e^{i2\pi\lambda n} d\lambda$	

La fréquence ν et la fréquence réduite λ sont d'ailleurs liées par la relation $\lambda = \nu \cdot T_e$.

L'attrait de telles formulations (II-8) ne réside pas seulement dans cette dualité parfaite entre le domaine fréquentiel et temporel, mais au fait que les fonctions $e^{-i2\pi\nu t}$ et $e^{-i2\pi\lambda n}$ sont respectivement des fonctions propres des SLIT continus et discrets, c'est-à-dire : $S[e^{i2\pi\nu t}] = H(\nu)e^{i2\pi\nu t}$ et $S[e^{i2\pi\lambda n}] = H(\lambda)e^{i2\pi\lambda n}$.

Au regard de la simplicité de la formulation du filtrage linéaire en domaine spectral, on comprend très bien l'intérêt porté à ce type de filtrage. Enfin, en ce qui concerne les unités, la réponse impulsionnelle s'exprime généralement en s^{-1} . Le gain complexe est par conséquent sans dimension, son module est donc souvent exprimé en décibel.

II.1.4 Quelques propriétés des transformées de Fourier des signaux échantillonnés.

II.1.4.1 Périodicité fréquentielle de la transformée en fréquence réduite

Comme nous le montre les relations (II-8), la transformée en fréquence réduite $X(\lambda)$ peut être considérée comme la projection de $x(n)$ sur les fonctions exponentielles harmoniques de la forme $e^{-i2\pi\lambda n}$, correspondant à la version échantillonnée de $e^{-i2\pi\nu t}$. Ainsi, en raison de leur

caractère discret, les fonctions de base $e^{-i2\pi\lambda n}$ vérifient l'égalité suivante: $e^{-i2\pi\lambda n} = e^{-i2\pi(\lambda+k)n}$ quelque soit l'entier relatif k . La transformée de Fourier en fréquence réduite d'un signal échantillonné a donc un comportement périodique similaire⁴. Ainsi, l'échantillonnage d'un signal périodise son spectre avec une période égale à 1 en fréquence réduite ou Fe (Fréquence d'échantillonnage) (Figure II-2). L'intervalle $[-0.5, 0.5]$ en fréquence réduite contient donc toute l'information nécessaire à la reconstruction du signal $x(n)$ tout entier ; c'est la raison pour laquelle les bornes d'intégration de la transformée de Fourier inverse en fréquence réduite se limitent à l'intervalle $[-0.5, 0.5]$.

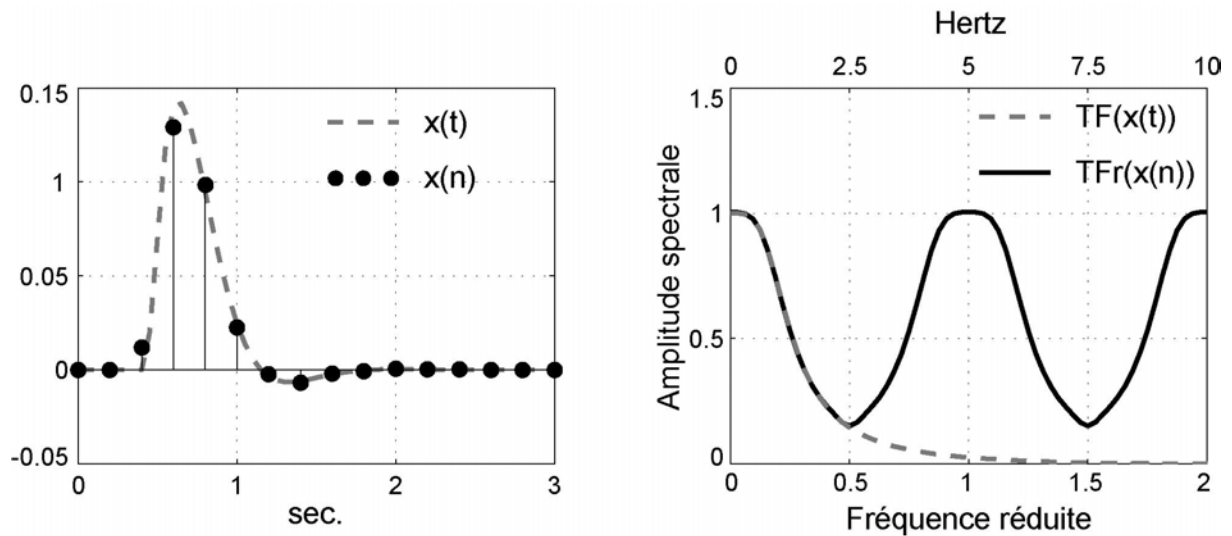


Figure II-2 : Transformée de Fourier d'un signal continu et transformée de Fourier en fréquence réduite de sa version échantillonnée.

II.1.4.2 La transformée de Fourier Discrète : TFD

1.4.2.1 Définition

La transformée de Fourier en fréquence réduite est une fonction à variable λ continue, ce qui la rend inutilisable pour un traitement purement numérique. On définit alors une transformée de Fourier Discrète TFD, qui correspond à la TFr échantillonnée en fréquence :

Transformée de Fourier Discrète	Transformée de Fourier Discrète Inverse	(II-9)
$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{i2\pi mn}{N}}$	$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{\frac{i2\pi mn}{N}}$	

Où N est le nombre d'échantillons que comporte le signal numérique $x(n)$.

⁴ Une démonstration plus rigoureuse du caractère périodique de la transformée de Fourier d'un signal numérique pourra être obtenue en utilisant la théorie des distributions.

D'une façon similaire à ce qui se passe lors de l'échantillonnage temporel, l'échantillonnage de la TFr à un pas fréquentiel β va conduire à une périodisation du signal temporel avec une période $T_s = NT_e = 1/\beta$ où T_e est le pas d'échantillonnage. La TFD est donc inversible mais seulement dans l'espace des signaux numériques périodiques. Ainsi, toutes les modifications des propriétés de la TFD par rapport à la TFr seront liées à cette contrainte de périodicité du signal temporel.

1.4.2.2 La convolution circulaire

L'utilisation des TFD implique que l'on travaille implicitement sur des séquences temporelles périodiques. Par conséquent, la transposition en domaine temporel de toutes les opérations classiques de la transformée de Fourier : décalage, convolution, etc, s'accompagnera d'une adaptation à cette propriété de périodicité. Ainsi, le produit de convolution de deux séquences périodiques, $x_1(n)$ et $x_2(n)$, de période N , appelé aussi produit de convolution circulaire, s'exprime de la façon suivante :

$$y(n) = x_1 * x_2 = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) x_2(n-k) \quad (\text{II-10})$$

On peut alors montrer que, d'une façon analogue à la TF ou la TFr, la convolution circulaire vérifie le théorème de Plancherel :

$$y(n) = x_1 * x_2 = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) x_2(n-k) \xLeftrightarrow{\text{TFD}} Y(n) = X_1(n) \cdot X_2(n) \quad (\text{II-11})$$

Ce résultat est de première importance, notamment lorsque l'on estime un produit de convolution par passage en domaine fréquentiel. En effet, en traitement numérique du signal, les transformées de Fourier sont estimées par TFD, notamment grâce à l'algorithme de calcul rapide de la TFD proposé par Cooley et Tukey, (1965), et plus connu sous le nom de FFT (Fast Fourier Transform). La séquence obtenue par TFD inverse du produit des TFD de deux signaux $x_1(n)$ et $x_2(n)$ de longueur N , correspondra donc implicitement à la convolution des deux séquences périodiques associées de période N . Dans ce cas, on parle plutôt de convolution circulaire. Il peut alors se produire des effets de bord désastreux. En effet, à cause de la périodicité, la fin et le début des signaux peuvent se confondre. Ainsi, lors de l'estimation d'une convolution ou déconvolution par passage en domaine spectral grâce à la FFT, il faudra être particulièrement vigilant à ne pas générer de telles erreurs. Une solution consiste notamment à prolonger les signaux par des zéros (zero padding).

Nous allons nous arrêter là en ce qui concerne nos rappels sur la TFD, TFr et TF, notre objectif n'étant pas d'effectuer un cours, nous n'avons par exemple pas parlé des propriétés de linéarité, de décalage, du domaine de convergence, etc.... Nous invitons donc le lecteur à se référer, pour un traitement plus exhaustif, à des ouvrages de traitement du signal (Oppenheim et Schaffer, 1975; Max et Lacoume, 1996) ou traitant des transformations mathématiques (Petit, 1995).

II.1.5 Description paramétrique des SLIT continus ou discrets

De même qu'en physique, on modélise les relations entrée-sortie d'un SLIT continu par des équations intégral-différentielles, les relations entrée-sortie des SLIT discrets sont modélisées par des équations aux différences de la forme :

SLIT continu	SLIT discret	
Equation différentielle d'ordre n (m<n)	Equation aux différences	
$\sum_{i=0}^n \alpha_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m \beta_i x^{(i)}(t)$	$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t)$	(II-12)
Où $y^{(i)}(t)$ et $x^{(i)}(t)$ représente la dérivée d'ordre i de $y(t)$ et $x(t)$.	Où $\max(n,m)$ est l'ordre du filtre	

Le physicien ou le traiteur numérique de signal ont développé deux outils de caractérisation et d'étude de ces signaux et systèmes, la transformée de Laplace TL pour les signaux analogiques et son équivalent numérique, la transformée en Z, appelé par (Silvia et Robinson, 1979) Laplace Z-Transform :

Transformée de Laplace	Transformée en Z	
$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = TL(x)$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = TZ(x)$	(II-13)

Où p et z sont des nombres complexes.

L'intérêt de tels outils réside dans le fait que, d'une façon analogue aux relations de Plancherel pour la Transformée de Fourier, ils transforment les relations de filtrage des systèmes continus ou discrets en de simples produits entre les transformées de Laplace du signal d'entrée $X(p)$ et du sortie $Y(p)$, ou entre leur transformée en Z, $X(z)$ et $Y(z)$, respectivement :

$Y(p) = H(p)X(p)$	$Y(z) = H(z)X(z)$
-------------------	-------------------

(II-14)

Où $H(p)$ et $H(z)$ sont respectivement les fonctions de transfert ou transmittance d'un système continu et d'un système discret. Dans le cas où ces systèmes sont régis par des équations du type (II-12), ces fonctions de transfert $H(p)$ ou $H(z)$ s'expriment sous la forme d'une fraction rationnelle en p ou en z respectivement :

$H(p) = \frac{\beta_m p^m + \beta_{m-1} p^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_0}$	$H(z) = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \dots + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \dots + a_0}$
---	--

(II-15)

Cette formulation de la réponse d'un SLIT permet de déterminer aisément, grâce à l'étude de la position des pôles des fractions rationnelles $H(p)$ ou $H(z)$, la stabilité et la forme de la réponse impulsionnelle du SLIT. Nous allons maintenant nous focaliser sur les systèmes discrets, et entre autres, sur la notion de stabilité. Nous verrons aussi dans quelle mesure ces systèmes sont capables de modéliser simplement des signaux géophysiques tels que la fonction source d'un séisme ou la réponse de site. Mais avant cela, nous allons revenir très rapidement sur l'équation aux différences.

II.1.6 Quelques remarques sur les systèmes discrets et l'équation aux différences

D'une façon plus générale à l'équation (II-12), on peut dire que le signal d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ des SLIT à temps discrets vérifient l'équation aux différences « généralisées »:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k x(n-k) \quad (II-16)$$

On remarquera que cette formulation est équivalente à l'équation de convolution (II-5) lorsque $a_k = \delta(k)$, c'est-à-dire que tous les coefficients a_k sont nuls sauf un : $a_0 = 1$.

En pratique, on s'intéresse essentiellement aux filtres dont l'équation aux différences ne fait intervenir qu'un nombre limité d'échantillons de sortie et d'entrée :

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{k=-P}^N b_k x(n-k) \quad \text{avec } M, N, P \in \mathbb{Z}^+ \quad (II-17)$$

Comme on peut le voir sur l'équation précédente, l'effet des coefficients a_k et b_k sur les signaux $y(n)$ et $x(n)$ ne fait intervenir que des délais k (avances et retards) référencés par rapport à la première valeur non nulle des coefficients a_k . Cette formulation ne modifie en rien les caractéristiques du SLIT puisque cette équation, tout comme le système, est invariante par décalage temporel. D'autre part, même si cette équation ne fait intervenir qu'un nombre

fini de coefficients, la réponse impulsionnelle du système correspondant peut être de longueur infinie (IIR), notamment par l'intermédiaire des coefficients a_k .

Pour les systèmes causaux, c'est-à-dire les systèmes ne faisant intervenir dans le calcul de la sortie $y(n)$ que les M sorties précédentes et les N entrées précédentes à l'instant n ($P=0$), on a une équation aux différences de la forme :

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) - \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \quad \text{avec } M, N \in \mathbb{N} \quad (\text{II-18})$$

Cette équation est appelée « équation aux différences finies d'ordre $\max(M, N)$ ». Malgré l'apparente généralité de cette formulation, cette équation ne concerne qu'un certain type de SLIT discrets, ceux dont la réponse impulsionnelle vérifie la relation de récurrence :

$$h[k] = -\sum_{i=1}^M a_i h[k-i] \quad \text{pour } k > N \quad (\text{II-19})$$

Cette relation de récurrence nous montre aussi le caractère IIR de la réponse impulsionnelle de ce type de système discret lorsque $a_i \neq 0$ avec $i \geq 1$. D'autre part, elle n'est donc capable de rigoureusement modéliser qu'une partie de l'ensemble des systèmes causaux : ceux régis par une équation aux différences d'ordre $\max(M, N)$.

Nous allons arrêter là notre description des modèles caractérisant les SLIT discrets, notamment nous n'avons pas parlé de la représentation d'état (De Larminat, 2002). Le lecteur désireux d'en savoir plus sur la description des systèmes continus et discrets, pourra aussi consulter les ouvrages de Kailath, (1980); Picinbono, (1998); Ljung, (1999) ou de Scherbaum, (1996) pour une version un peu plus sismologique.

II.1.7 Caractérisation et stabilité des SLIT discrets

Nous avons vu que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions propres des SLIT. La transformée de Fourier (continue ou discrète) joue donc un rôle fondamental dans l'étude des SLIT mais encore faut-il qu'ils soient stables. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe II.1.5, un outil fondamental d'étude de la stabilité des SLIT discrets est la Transformée en Z. En effet, contrairement à la transformée de Fourier, la transformée en Z permet de caractériser des signaux présentant une divergence exponentielle : $x(n) \approx a^{|n|}$ quand $|n| \rightarrow \infty$, $|a| > 1$.

II.1.7.1 Un outil : la transformée en Z

1.7.1.1 Domaine de convergence

Par définition (II-13), la transformée en z est donc une fonction d'une variable complexe dont l'existence dépendra de la région de convergence de la série entière de terme général $x(n)z^{-n}$.

Remarque : En géophysique (Sherwood et Trorey, 1965), les conventions sont souvent inversées $z^{-n} \rightarrow z^n$, néanmoins dans tout ce travail de thèse nous avons adopté la convention classiquement utilisée en traitement du signal : z^{-n} .

De façon générale, on peut montrer que la série entière (II-13) converge sur un anneau du plan complexe en z :

$$0 \leq R_1 < |z| < R_2 \leq +\infty \quad (\text{II-20})$$

Ainsi on appellera transformée en z l'ensemble formé par la fonction $X(z)$ et la région de convergence $R_1 < |z| < R_2$.

Nous n'allons pas donner une démonstration de ce résultat, mais nous espérons qu'il deviendra un peu plus intuitif au travers d'exemples.

1.7.1.2 Exemples de domaine convergence de la TZ d'un signal

Considérons le **signal discret causal**:

$$\begin{cases} x(n) = a^n & \text{si } n \geq 0 \\ x(n) = 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

La transformée en z d'une telle séquence sera de la forme⁵ :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ si } |az^{-1}| < 1 \text{ soit } |z| > |a|$$

La transformée en z de $x(n)$ est donc $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ sur le codisque $|a| < |z| < +\infty$ du plan complexe, et ceci sans faire une seule hypothèse sur a . Ce résultat est donc valable pour une séquence convergente $|a| < 1$, comme pour une séquence divergente $|a| > 1$. D'une façon analogue au cas précédent, où $X(z)$ comporte 1 seul pôle, on peut effectuer le même type de raisonnement pour une séquence oscillante comportant 2 pôles complexes conjugués. La Figure II-3 ci-dessous, présente un exemple de séquence causale divergente dont la transformée en z comporte deux pôles, a et a^* , complexes conjugués l'un de l'autre tels que $|a| > 1$. Son domaine de convergence est le codisque $|z| > |a|$.

⁵ Résultat évident en pensant à l'identité : $\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$

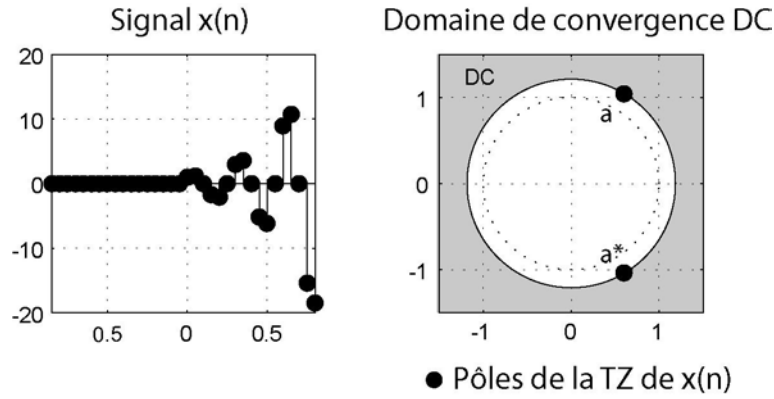


Figure II-3 : Séquence $x(n)$ causale associée au domaine de convergence (DC) $|a| < |z|$ et à la TZ : $1/(1-az^{-1})$ ($1-a^*z^{-1}$) avec $|a| > 1$ et où a^* représente le complexe conjugué de a .

Considérons maintenant le **signal discret anticausal** :

$$\begin{cases} x_-(n) = 0 & \text{si } n \geq 0 \\ x_-(n) = -a^n & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

La transformée en z d'une telle séquence sera de la forme:

$$X_-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -a^{-1} z \sum_{m=0}^{+\infty} a^{-m} z^m = \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ si } |a^{-1} z| < 1 \text{ soit } |z| < |a|$$

La TZ de $x_-(n)$ est $X_-(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ sur le disque du plan complexe $|z| < |a|$. Inversement au cas précédent, il s'agira d'une séquence anticausale divergente si $|a| < 1$ et convergente si $|a| > 1$. La Figure II-4 représente le domaine de convergence d'une séquence $x(n)$ anticausale convergente de transformée en z comportant deux pôles, a et a^* , complexes conjugués l'un de l'autre.

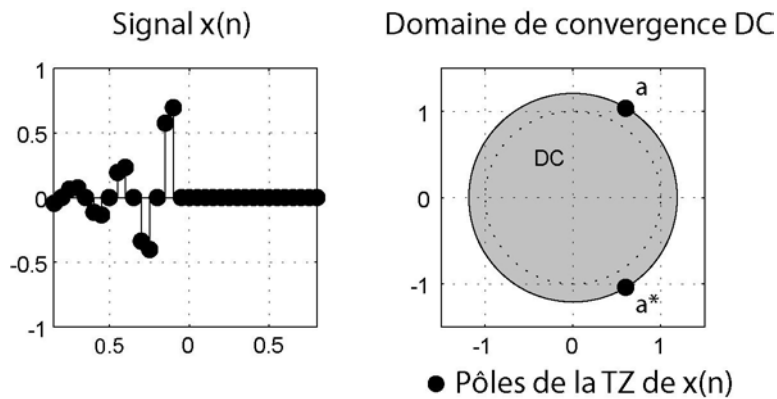


Figure II-4 : Séquence $x(n)$ anticausale associée au domaine de convergence (DC) $|z| < |a|$ et à la TZ : $1/(1-az^{-1})$ ($1-a^*z^{-1}$) avec $|a| > 1$ et, où a^* représente le complexe conjugué de a .

On pourrait alors très bien considérer le **signal discret bilatéral** :

$$\begin{cases} x(n) = a^n & \text{si } n \geq 0 \\ x(n) = -b^n & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On montrerait alors que $TZ[x(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$ sur la couronne $|a| < |z| < |b|$ (ce qui sous-entend que $|a| < |b|$). Comme précédemment, la Figure II-5 ci-dessous représente le domaine de convergence d'un signal bilatéral $x(n)$ dont la transformée en Z comporte 4 pôles a, a^*, b et b^* .

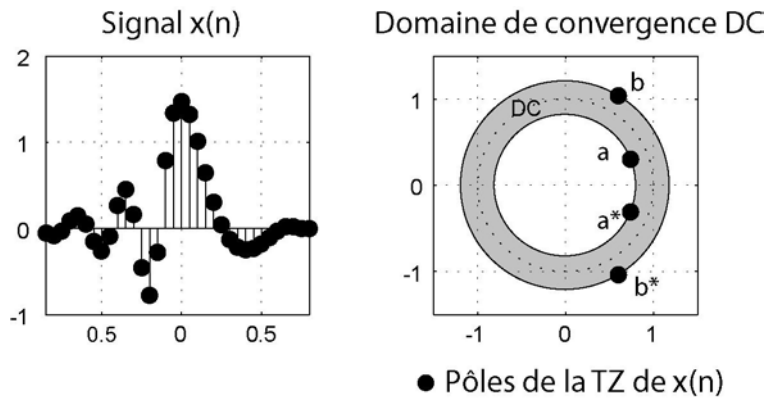


Figure II-5 : Séquence $x(n)$ bilatérale associée au domaine de convergence (DC) $|a| < |z| < |b|$ et à la TZ : $1/((1-az^{-1})(1-a^*z^{-1})(1-bz^{-1})(1-b^*z^{-1}))$ où a^* et b^* représentent respectivement les complexes conjugués de a et b .

Ces petits exemples nous ont montré que, contrairement à la TF, la TZ existe pour des signaux présentant une divergence exponentielle. Par ailleurs, on remarquera que deux séquences distinctes peuvent très bien avoir une même TZ, mais elles auront alors des régions de convergence différentes ! La Figure II-6 donne une vue d'ensemble des séquences associées à différentes positions des pôles d'une TZ de la forme :

$$X(z) = \frac{1}{A(z)} \quad \text{avec} \quad A(z) = \begin{cases} 1/(1-az^{-1}) & \text{si } a \text{ réel} \\ 1/(1-az^{-1})(1-a^*z^{-1}) & \text{si } a \text{ complexe} \end{cases} \quad (\text{II-21})$$

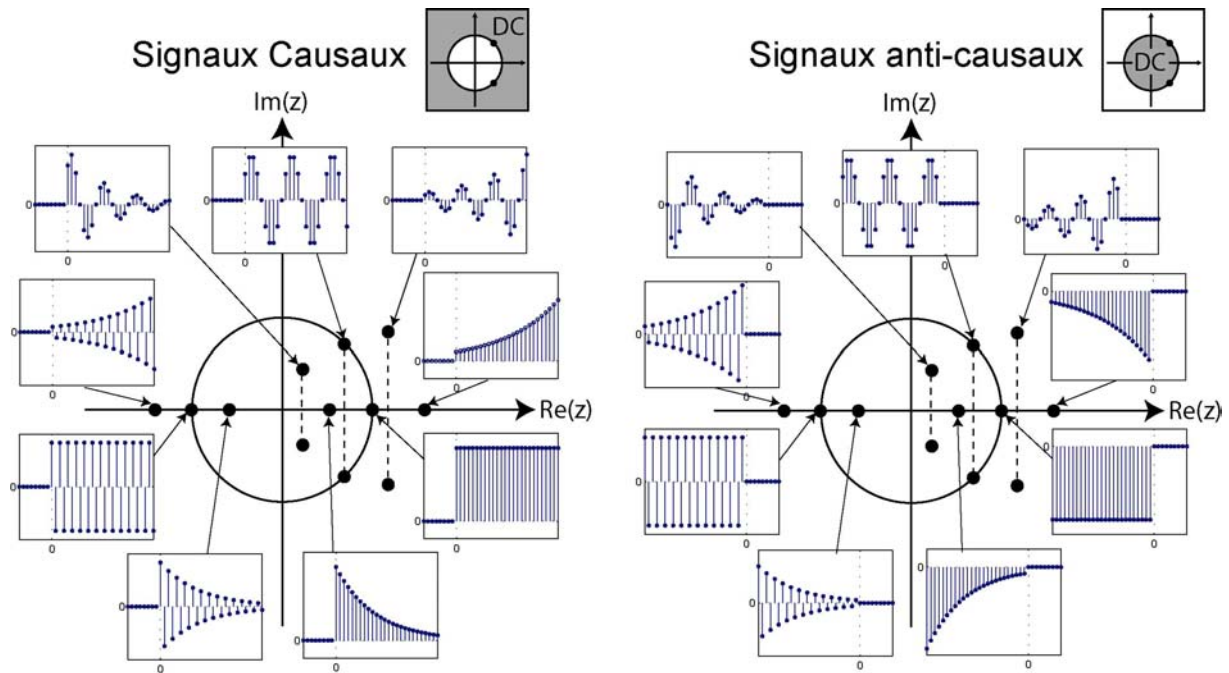


Figure II-6 : Correspondance entre la séquence $x(n]$ et la position des pôles de sa TZ $X(z)$, à gauche signaux causaux, à droite signaux anti-causaux.

En résumé, on rappellera les résultats suivants :

- La transformée en z , si elle existe, de signaux causaux (nul pour $k < 0$), est définie sur un codisque (plan complexe privé d'un disque centré sur l'origine).
- La transformée en z , si elle existe, de signaux anticausaux (nul pour $k > 0$), est définie sur un disque centré sur l'origine du plan complexe
- Un signal qui diverge⁶ pour $k > 0$ et $k < 0$, ou un signal périodique n'ont pas de transformée en z .
- La transformée en z d'un signal absolument sommable, existe toujours et sa couronne de convergence contient le cercle unité.

1.7.1.3 Inversion de la transformée en Z

La transformée en z inverse peut-être calculée de diverses façons, comme par exemple grâce à l'intégrale :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (\text{II-22})$$

où C est un contour fermé du plan complexe inclus dans la région de convergence. En pratique cette formulation est difficilement utilisable, voire inutilisable. On lui préfère

⁶ Si on considère par exemple que les parties causales et anticausales ne comportent chacune qu'un seul pôle, leur divergence respective implique que leurs domaines de convergence n'ont pas d'intersection commune.

d'autres méthodes telles que le développement en série puissance, comme lors du traitement homomorphique du signal (calcul du cepstre) (Oppenheimer Schafer 1975 et Ulrych 1971), ou le développement par division de polynômes (Truchetet, 1998). Nous allons nous attarder un peu sur une quatrième méthode : le développement en fractions partielles.

Cette méthode ne s'applique qu'à des transformées en z s'exprimant sous forme d'une fraction rationnelle (II-15), donc typiquement les SLIT discrets régis par une équation paramétrique (II-12).

Ainsi, considérons un SLIT régi par l'équation aux différences (II-18), l'expression (II-13) de sa fonction de transfert $H(z)$, c'est-à-dire la transformée en z de sa réponse impulsionnelle $h(t)$, peut se mettre sous la forme :

$$H(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (\text{II-23})$$

avec $B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k$ et $A(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^k$.

Classiquement en traitement du signal, on appelle :

- **Zéros** du SLIT de fonction de transfert $H(z)$, les racines z_{0i} du polynôme $B(z^{-1})$.
- **Pôles** du SLIT de fonction de transfert $H(z)$, les racines z_{pi} du polynôme $A(z^{-1})$.

Dans ce cas les polynômes $B(z)$ et $A(z)$ ont pour racines respectives $1/z_{0i}$ et $1/z_{pi}$.

D'autre part, lorsqu'un signal, ici une réponse impulsionnelle, a une TZ $H(z)$ sous la forme d'une fraction rationnelle en z , un théorème d'algèbre classique (Guinin et al., 1993), nous dit que l'on peut la décomposer en une somme d'éléments simples de la forme :

$$H(z) = E(z^{-1}) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n_{pi}} \frac{C_{ij}}{(1 - z_{pi} z^{-1})^j} \right) \quad (\text{II-24})$$

Où n est le nombre de racines z_{pi} distinctes de $A(z)$ et n_{pi} leur ordre de multiplicité respective. C_{ij} est quant à lui un nombre complexe. $E(z)$ est un polynôme qui n'existe que lorsque $Deg(B(z)) > Deg(A(z))$, dans ce cas $Deg(E(z)) = Deg(B(z)) - Deg(A(z))$.

Ainsi, on peut décomposer le signal $H(z)$ en une somme de fractions élémentaires simples, dont il est souvent facile de trouver une expression de sa transformée en z inverse (paragraphe 1.7.1.2 élément simple de degré 1). Donc, moyennant la connaissance du domaine de convergence de $H(z)$, on est capable de calculer la réponse impulsionnelle de notre filtre qui

se résume à la somme des réponses impulsionnelles de chaque élément simple sur le domaine de CV de $H(z)$.

Ainsi, nous venons de voir que l'étude de la fonction de transfert en z d'un SLIT discret, décrit par une équation paramétrique du type (II-12), nous permet, à partir de la connaissance de son domaine de CV, de déterminer sa réponse impulsionnelle $h(t)$ grâce, par exemple, à l'inversion de l'expression en élément simple (II-24) de $H(z)$.

D'autre part, on a vu que pour certains domaines de convergence et certaines positions des pôles de sa fonction de transfert, la réponse impulsionnelle de ce SLIT discret, décrit par une équation aux différences, pouvait être divergente ou convergente. Après avoir rappelé la définition de la notion de stabilité d'un SLIT, qui est associée à la notion de convergence de sa réponse impulsionnelle, nous donnerons quelques critères pratiques d'étude de la stabilité des SLIT discrets à partir des relations : stabilité – position des pôles et domaine de convergence.

II.1.7.2 Stabilité des SLIT discrets

1.7.2.1 Définition

Il existe différentes définitions de la stabilité suivant le système étudié. Nous allons utiliser la stabilité EBSB (Entrée Bornée Sortie Bornée). Par exemple, lorsque l'on cherche à créer un filtre numérique pour sélectionner une bande de fréquence d'un signal borné en amplitude, on veut qu'il nous fournisse un signal, a priori borné, représentatif de la bande de fréquence sélectionnée. Par ailleurs, lorsque l'on veut modéliser la propagation d'ondes sismiques à l'intérieur de la terre par un filtre numérique, on sait que le signal enregistré en surface est borné, un tel filtre est alors nécessairement stable EBSB.

Nous allons tout d'abord définir cette notion de stabilité EBSB, et en énoncer les conséquences quant aux propriétés de la réponse impulsionnelle d'un SLIT discret et quant aux caractéristiques de sa fonction de transfert.

Définition :

Un système est dit stable si sa réponse à toute entrée bornée en amplitude est elle-même bornée en amplitude.

L'impact d'une telle hypothèse de stabilité sur la réponse impulsionnelle du SLIT discret, nous permet d'énoncer la condition nécessaire et suffisante de stabilité suivante :

Un SLIT discret sera stable EBSB si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable.

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |h(k)| < +\infty \quad (\text{II-25})$$

Nous n'allons pas donner une démonstration de ce résultat, le lecteur intéressé pourra se référer à l'ouvrage (De Larminat, 2002).

Par comparaison des formulations de la TZ (II-13) et de la stabilité des systèmes discrets (II-25), il vient immédiatement le corollaire suivant concernant sa fonction de transfert:

Un SLIT discret est stable si et seulement si sa fonction de transfert converge sur le cercle unité, c'est-à-dire si le cercle unité appartient au domaine de convergence de la fonction de transfert.

1.7.2.2 Quelques considérations pratiques sur l'étude de la stabilité des SLIT discrets

Ainsi, en utilisant les domaines de CV de la TZ d'un signal (Figure II-6), on peut énoncer des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité d'un filtre en fonction de la position des pôles de sa fonction de transfert :

- Un filtre causal sera stable si et seulement si son rayon de convergence est inférieur à 1. Ses pôles sont alors à l'intérieur du cercle unité.
- Un filtre anticausal sera stable si et seulement si son rayon de convergence est supérieur à 1. Ses pôles sont alors à l'extérieur du cercle unité.
- Un filtre bilatéral aura sa stabilité assurée si il n'a aucun pôle sur le cercle unité du plan en z .
- Un filtre RIF a sa région de convergence égale au plan complexe (sauf exception de l'origine et de l'infini), il sera donc toujours stable.

Par ailleurs, le corollaire précédent implique donc que l'hypothèse de stabilité nous assure la convergence simultanée des transformées en z et en fréquences réduites. La transformée de Fourier n'est alors rien d'autre que la transformée en z obtenue pour z décrivant le cercle de rayon 1. On a d'ailleurs la relation de passage : $z=e^{i2\pi\lambda}$ pour la transformée de Fourier en fréquences réduites.

Ainsi, connaissant la position des pôles d'un système, la contrainte de stabilité nous permet de définir un domaine de convergences du SLIT ainsi que la contribution respective de chaque pôle à la partie causale ou anticausale.

II.1.8 Le bestiaire associé à l'équation aux différences finies

On a vu que les filtres associés à l'équation aux différences finies (II-18) ne représentent qu'une partie du vaste ensemble des SLIT discrets. Une classification, issue du monde de l'analyse spectrale (Marple, 1987; Kay, 1988), sépare l'ensemble des systèmes régis par une équation aux différences en trois grandes classes, suivant la présence ou non d'un numérateur ou d'un dénominateur dans sa fonction de transfert. Nous verrons que chacun de ces modèles sont plus ou moins bien adaptés à modéliser certains types de signaux géophysiques.

II.1.8.1 Les systèmes MA (Moving Average ou Moyenne Ajustée en français) d'ordre N

Le calcul de la sortie d'un tel système ne fait intervenir que l'entrée courante et N entrées passées sous forme d'une moyenne pondérée par les coefficients b_k .

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \quad (\text{II-26})$$

La sortie n'est autre que la convolution de $y(n)$ par la séquence b_k . La fonction de transfert d'un tel système se limite donc à son numérateur :

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \quad (\text{II-27})$$

Il s'agit bien évidemment d'un filtre RIF, mais avec la particularité d'être causal. Ainsi, puisqu'il ne présente pas de pôles, sauf peut-être en zéro, ce filtre a la propriété d'être stable quelque soit b_k , comme tous les filtres RIF d'ailleurs.

Le modèle MA est particulièrement adapté pour caractériser un filtre dont le spectre comporte des « vallées profondes » ou trous spectraux (Kay, 1988), comme par exemple les systèmes correspondant à un nombre fini d'échos. En sismologie, un tel système sera bien adapté à modéliser les signaux de durée finie tel que par exemple, la fonction source du mouvement sismique.

II.1.8.2 Les systèmes AR (AutoRegressif) d'ordre M

La sortie d'un tel système est calculée à partir de l'entrée courante et de M sorties précédentes pondérées par la séquence constituée par les coefficients a_k .

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + x(n) \quad (\text{II-28})$$

La fonction de transfert d'un tel filtre, tout pôle, ne possède donc aucun zéro :

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (\text{II-29})$$

Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, l'inversion d'une telle fonction de transfert nous fournit une réponse impulsionnelle infinie. L'intérêt de tels systèmes, c'est qu'ils sont capables de modéliser un système de réponse impulsionnelle de durée infinie à partir seulement d'un nombre fini de paramètres a_k . De plus, cette modélisation AR est exacte lorsque la réponse impulsionnelle vérifie l'équation de récurrence (II-19). Les modèles AR sont particulièrement adaptés à modéliser des systèmes présentant des maxima spectraux (Kay, 1988), comme par exemple les systèmes résonnants. Ils sont notamment particulièrement adaptés à représenter la fonction de transfert d'un système de couches géologiques planes (Silvia et Robinson, 1979). Enfin, d'après le paragraphe précédent, on voit très bien qu'un tel système sera stable et causal si est seulement si les racines z_{pi} de son dénominateur sont à l'intérieur du cercle unité.

II.1.8.3 Les systèmes ARMA (M,N)

Le modèle ARMA consiste donc à la mise en cascade d'un système AR d'ordre M et d'un système MA d'ordre N :

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) - \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \text{ avec } M, N \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{II-30})$$

Sa fonction de transfert se présente donc sous la forme d'une fraction rationnelle (II-15).

Ce genre de modèle permet de modéliser des filtres dont le spectre présente simultanément des maxima et des minima spectraux marqués. Comme précédemment, ce système sera stable et causal si est seulement si les racines de son dénominateur sont à l'intérieur du cercle unité.

II.1.9 Lien continu-discret

Une question, bien légitime, lorsque l'on travaille sur des représentations discrètes de systèmes ou de signaux physiques continus, est la suivante : « Quel lien existe-t-il entre les paramètres physiques du système continu et les paramètres du modèle discret correspondant ? »

Malheureusement, ce lien est loin d'être direct et on peut même dire qu'il n'y a généralement pas de lien simple entre les coefficients des modèles MA, AR ou ARMA et les paramètres physiques du système étudié.

D'une part, parce qu'un signal échantillonné n'est qu'une approximation du système continu qu'il représente, sauf si ce dernier à un support fréquentiel de largeur finie. C'est-à-dire s'il respecte le théorème de l'échantillonnage de Shannon (Slepian, 1976; Unser, 2000).

D'autre part, il existe plusieurs transformations possibles permettant de passer d'une formulation analogique, sous forme d'une transformée de Laplace, à une formulation numérique, sous forme d'une transformée en z . Par exemple, considérons seulement trois de ces méthodes d'identification de filtre (Oppenheim et Schafer, 1975) : l'approximation des dérivées, la transformation bilinéaire (approximation de l'opération d'intégration), et l'invariance impulsionnelle. En appliquant ces trois opérateurs à une même réponse d'un filtre d'ordre 2, dont la transformée de Laplace $H(s)$ comporte 2 pôles conjugués p_0 et p_0^* :

$$H(s) = \frac{a}{(s - p_0)(s - p_0^*)} \text{ avec } p_0 = -\alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta) \in (\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}) \quad (\text{II-31})$$

on obtient ainsi trois transformées en z différentes (Tableau 1).

<p>Passage continu-discret :</p> $H(s) = \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{s - p_j}}_{(1)} \leftrightarrow H(z) = \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{1 - z_{0_j} z^{-1}}}_{(2)}$	<p>$H(z)$</p> <p>pour un système résonnant d'ordre 2 (II-31)</p>
<p>Dérivation : $s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$ dans (1)</p>	$\frac{aT_e^2}{(1 - p_0 T_e - z^{-1})(1 - p_0^* T_e - z^{-1})}$
<p>Intégration : $s \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ dans (1)</p>	$\frac{aT_e^2 (1 + z^{-1})^2}{[(2 - p_0 T_e) - (2 + p_0 T_e)z^{-1}][(2 - p_0^* T_e) - (2 + p_0^* T_e)z^{-1}]}$
<p>Echantillonnage de la réponse Impulsionnelle : $z_{0_j} \rightarrow e^{p_j T_e}$ dans (2)</p>	$\frac{ae^{-\alpha T_e} \sin(\beta T_e)}{\beta} \frac{z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T_e} \cos(\beta T_e)z^{-1} + e^{-2\alpha T_e} z^{-2}}$

Tableau 1 : Exemples de transformation système continue/système discret, d'après le cours d'analyse spectrale de Gilles Fleury (Fleury, 2000)

En fait, c'est le problème inverse, associé à cette identification de filtre, qui nous intéresse. C'est-à-dire, ayant identifié une structure ARMA, comment retrouver les paramètres physiques du système continu correspondant ?

En pratique, à partir de mesures de la réponse d'un système résonnant, on identifie numériquement, sur les signaux échantillonnés, un système ARMA(2,1). Ce modèle mathématique, en utilisant l'équivalence continu-discret basée sur « l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle » (Tableau 1), nous permet d'estimer les pôles p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{T_E} \ln(z_{p_0}) = -\alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta) \in (\mathfrak{R}^{++} \times \mathfrak{R}) \quad (\text{II-32})$$

où z_{p_0} est l'un des deux pôles conjugué du modèle ARMA. Ainsi, les pôles du modèle numérique ARMA équivalent nous donnent alors accès à la fréquence de résonance et à l'amortissement du système résonnant.

Néanmoins, en raison de la grande diversité de modèles ARMA susceptibles de correctement représenter un système physique donné (Tableau 1), mais aussi en raison de l'imprécision engendrée par la présence de bruit lors de l'estimation de ce modèle ARMA, il est souvent périlleux de vouloir extraire de cette représentation discrète des paramètres physiques précis. En effet, deux théorèmes, nous disent respectivement que tous les processus ARMA et AR peuvent être représentés par un unique modèle MA d'ordre infini (Wold, 1954), ou inversement, que tout processus ARMA et MA peuvent être représentés par un unique modèle d'ordre AR infini (Kolmogorov, 1941). Ainsi, en présence de bruit, un pôle pourra très bien être représenté, à une précision ε près, par un nombre fini de coefficient MA. L'information sera alors transférée au numérateur, et sera donc en quelque sorte inaccessible en utilisant les formules du tableau précédent.

De même, bien que la modélisation polynomiale en z de la réponse d'une couche de terrain fait clairement apparaître les coefficients de réflexion, de transmission et d'atténuation du terrain, les coefficients du modèle polynomial ARMA d'un milieu multicouche entretiennent une relation beaucoup plus complexe avec les paramètres physiques du milieu, par exemple au travers de leur autocorrélation (Silvia et Robinson, 1979). Mais nous en reparlerons dans le Chapitre IV.

II.2 La déconvolution

Maintenant que nous avons rappelé les principales caractéristiques et propriétés de l'opération de convolution ainsi que son lien avec l'opération de filtrage linéaire, nous allons nous intéresser à la déconvolution.

II.2.1 Définition du problème

La déconvolution est le problème inverse associé à la convolution. Typiquement, il consiste à estimer le signal d'entrée d'un filtre à partir de son signal de sortie et de la réponse impulsionnelle ou de la fonction de transfert de ce filtre (Figure II-7) :

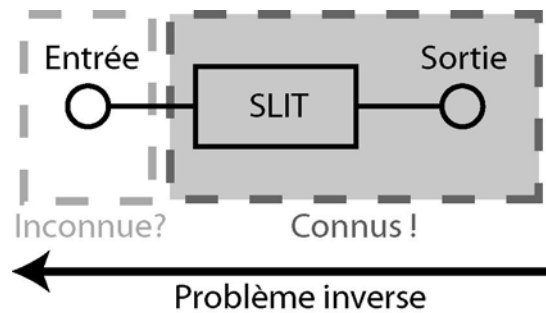


Figure II-7 : Le problème inverse associé à la convolution : la déconvolution.

$$x(t) = h(t) *^{-1} y(t) \Leftrightarrow x(t) = h^{-1}(t) * y(t) \quad (\text{II-33})$$

où $*^{-1}$ désigne « l'opération de déconvolution » et $h^{-1}(t)$ est le filtre inverse associé à $h(t)$.

Cette double formulation de la déconvolution, même si elle est purement formelle, nous montre que l'on peut appréhender le problème de la déconvolution de deux façons : soit en utilisant l'opérateur « inverse » associé à la convolution, soit en utilisant le filtre inverse $h^{-1}(t)$. Dans ce dernier cas, on parle plutôt d'**égalisation**⁷.

Lorsque c'est la réponse $h(t)$ du SLIT que l'on cherche à estimer à partir d'un couple de signaux entrée/sortie, on parle alors d'**identification de processus**.

II.2.2 Formulation temporelle de la déconvolution

Considérons trois séquences $\{y(n)\}$, $\{x(n)\}$ et $\{h(n)\}$ correspondant respectivement au signal de sortie, au signal d'entrée et à la réponse impulsionnelle du SLIT discret, et comportant respectivement $N+L$, N et $L+1$ échantillons.

L'équation de convolution (II-6) permettant de calculer le $k^{\text{ième}}$ échantillon de sortie $y(k)$ du filtre de réponse $h(n)$ peut se mettre sous forme d'un produit de deux vecteurs :

⁷ On parle d'égalisation surtout en télécommunication dans les systèmes de réception, lorsque on cherche à corriger (déconvolution) du canal de transmission, en identifiant directement le filtre inverse sans en identifier la réponse impulsionnelle.

$$y(k) = [\cdots \quad 0 \quad h(L) \quad \cdots \quad h(1) \quad h(0) \quad 0 \quad \cdots] \cdot \underset{\substack{\uparrow k+1^{\text{ème}} \\ \text{colonne}}}{[x(0) \quad \cdots \quad x(k-L) \quad \cdots \quad x(k-1) \quad x(k) \quad \cdots \quad x(N-1)]^T}$$

Ainsi en réitérant cette opération pour tous les échantillons $y(n)$ et en donnant une forme vectorielle aux séquences $\{y(n)\}$ et $\{x(n)\}$: $y = [y(0) \quad y(1) \quad \cdots \quad y(N+L-1)]$ et $x = [x(0) \quad x(1) \quad \cdots \quad x(N-1)]$, la relation de convolution prend la forme matricielle suivante :

$$y = Hx \quad (\text{II-34})$$

avec

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 \\ h(1) & h(0) & \ddots & & & & \vdots \\ h(2) & h(1) & h(0) & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ h(L) & & & & h(0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & h(L) & & & h(0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & & & \ddots & h(L) & h(L-1) & h(L-2) \\ \vdots & & & & \ddots & h(L) & h(L-1) \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & h(L) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \xleftarrow{N} \\ \updownarrow N-1 \\ \updownarrow L+1 \end{matrix} \quad (\text{II-36})$$

En procédant par exemple à une inversion par moindre carré, l'opération de déconvolution prend la forme :

$$x = (H^T H)^{-1} H^T y \quad (\text{II-36})$$

Suivant les dimensions des séquences mises en jeu, cette formulation temporelle de l'opération de déconvolution peut impliquer l'inversion d'un système linéaire de dimension plutôt importante (dimension $N \times N$), ce qui n'est pas sans poser certains problèmes puisque H est souvent mal conditionnée (Demoment, 1989). Mais nous y reviendrons dans ce qui suit.

II.2.3 Formulation fréquentielle de la déconvolution

Comme on l'a vu, le théorème de Plancherel stipule qu'en domaine fréquentiel l'opération de convolution consiste en un produit de transformées de Fourier (II-7). L'opération de déconvolution prend donc la forme d'une simple division :

$$X(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{H(\lambda)} \quad (\text{II-37})$$

Ainsi comme $h(t)$ est supposé connu, on a directement accès au gain complexe du filtre inverse $h^{-1}(n)$:

$$TFr(h^{-1}(n)) = \frac{1}{H(\lambda)} \quad (\text{II-38})$$

Même si la formulation fréquentielle présente l'avantage de ne pas nécessiter l'inversion de matrices de dimension importante pouvant être mal conditionnées, elle se heurte aussi à des problèmes de stabilité, notamment pour des filtres à largeur de bande limitée. En effet, lorsque $H(\lambda_0)=0$, le terme $1/H(\lambda_0)$ diverge, il est alors impossible d'accéder à $X(\lambda_0)$. C'est entre autre pour cette raison que l'opération de déconvolution est un problème inverse « Mal-posé ».

Enfin on remarquera qu'en pratique, la transformée de Fourier est estimée par TFD, laquelle périodise les signaux implicitement. On aura donc affaire à une déconvolution circulaire, nécessitant les mêmes précautions que pour la convolution c'est-à-dire l'ajout d'échantillons nuls en fin de signal (paragraphe 1.4.2.2). Pour plus de précision concernant les différences entre approches temporelle et fréquentielle, on pourra consulter Mansar, (1997).

II.2.4 Un problème inverse mal posé

D'après Tikhonov et Arsenin, (1977), c'est à Jacques Hadamard que l'on doit la notion de problème bien-posé. Un problème inverse est dit bien posé lorsque sa solution satisfait les trois conditions suivantes : existence, unicité, et stabilité. Or comme on peut le voir ce n'est pas le cas de la déconvolution (Figure II-8).

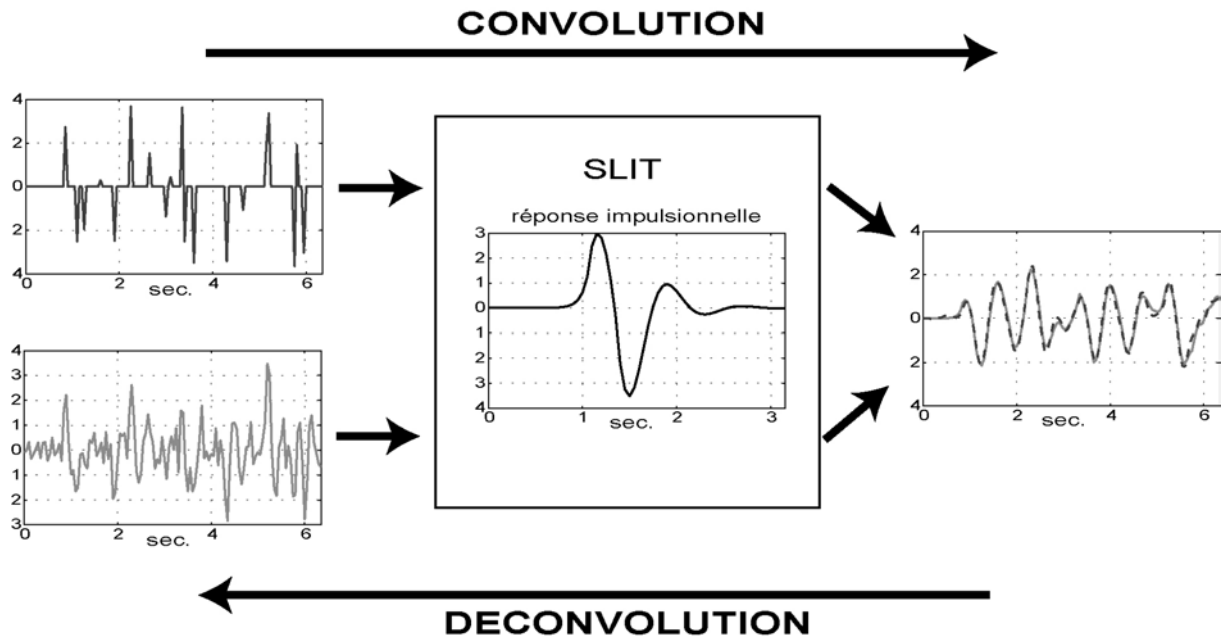


Figure II-8 : Instabilité et non unicité de la solution de l'opération de déconvolution.

En effet, cette figure nous montre d'une part, que la convolution de deux signaux distincts par un même filtre peut fournir des signaux identiques avec une erreur très d'à peine -15dB. Par conséquent, l'opération de déconvolution associée n'a pas une solution unique. Conceptuellement, cela se conçoit très bien d'un point de vue spectral. En effet, considérons un filtre de largeur de bande finie B et deux signaux « d'entrée » dont le contenu spectral est identique jusqu'à B mais différent au-delà. Leurs signaux de sortie respectifs seront donc identiques, puisque justement l'opération de filtrage élimine la partie spectrale qui différencie ces deux signaux. On voit par cet exemple que l'opération de filtrage nous fait perdre de l'information sur le signal d'entrée, il est alors impossible de le reconstituer fidèlement seulement à partir du signal de sortie, en tout cas dans la bande coupée.

D'autre part, cette figure nous montre aussi l'instabilité de la déconvolution. C'est-à-dire qu'une petite perturbation sur le signal de sortie engendrera des signaux de déconvolution complètement différents. L'exemple le plus intuitif est celui d'un filtre atténuant fortement une certaine bande fréquentielle, de telle sorte que le bruit devienne supérieur au signal utile. Son filtre inverse, dont le rôle est d'amplifier les bandes atténuées afin de retrouver le signal initial, va par conséquent fortement amplifier le bruit. Ainsi, la moindre perturbation même très faible, pour peu qu'elle soit supérieure au signal utile (Figure II-8), va avoir des conséquences néfastes quant à la qualité du signal obtenu par déconvolution.

Finalement, l'opération de filtrage s'accompagne donc parfois d'une certaine perte d'information sur le signal d'entrée du système. Malheureusement, cette information sera

irréremdiablement perdue dans le sens qu'elle ne pourra pas être retrouvée par déconvolution. Néanmoins, il existe toute une panoplie de méthodes nous permettant d'extraire au mieux l'information à notre disposition, ceux sont les méthodes de régularisation.

II.2.5 Méthodes de régularisation

D'après ce qui précède, on conçoit bien qu'il est impossible d'obtenir la vraie solution à partir de données erronées ou bruitées. Plutôt que de chercher la vraie solution, nous allons tenter d'en trouver une approximation grâce à l'utilisation de méthodes dites de régularisation. Ces méthodes sont bien sûr utilisées par les géophysiciens, il n'en reste pas moins que le traitement numérique des images est le domaine de prédilection de l'utilisation de ces méthodes. On pourra consulter le très bon article de synthèse de Demoment, (1989) ainsi que la thèse de Fleury, (1994) qui en donne une application pour l'identification de profil de vitesse par sondage ultra-sonore.

En domaine fréquentiel, une méthode couramment utilisée en sismologie pour stabiliser la déconvolution est la méthode du « waterlevel » (Clayton et Wiggins, 1976). Celle-ci consiste à éliminer les valeurs trop faibles du dénominateur en les « seuillant » à un certain pourcentage de la valeur maximale du gain du filtre à inverser :

$$X(\lambda) = \frac{H^*(\lambda)}{\max\{|H(\lambda)|^2, k \cdot \max\{|H(\lambda)|^2\}\}} Y(\lambda) \text{ avec } 0 < k < 1 \quad (\text{II-39})$$

En pratique, k est le plus souvent choisi égal à l'inverse du rapport signal sur bruit (Mari et al., 1997).

Une autre méthode consiste à ajouter un terme constant au dénominateur (Deregowski, 1971; Oldenburg, 1981).

$$X(\lambda) = \frac{H^*(\lambda)}{T^2 |H(\lambda)|^2 + \gamma T |N(\lambda)|} Y(\lambda) \quad (\text{II-40})$$

où T est la durée sur laquelle on calcule la Transformée de Fourier et $|N(\lambda)|$ l'amplitude spectrale du bruit.

Plus simplement, (Tikhonov et Arsenin, 1977) nous dit que :

$$X(\lambda) = \frac{H^*(\lambda)}{|H(\lambda)|^2 + \mu} Y(\lambda) \quad (\text{II-41})$$

μ est alors appelé coefficient de blanchiment en géophysique. La Figure II-9 suivante nous donne un exemple de déconvolution par water-level de type (II-41).

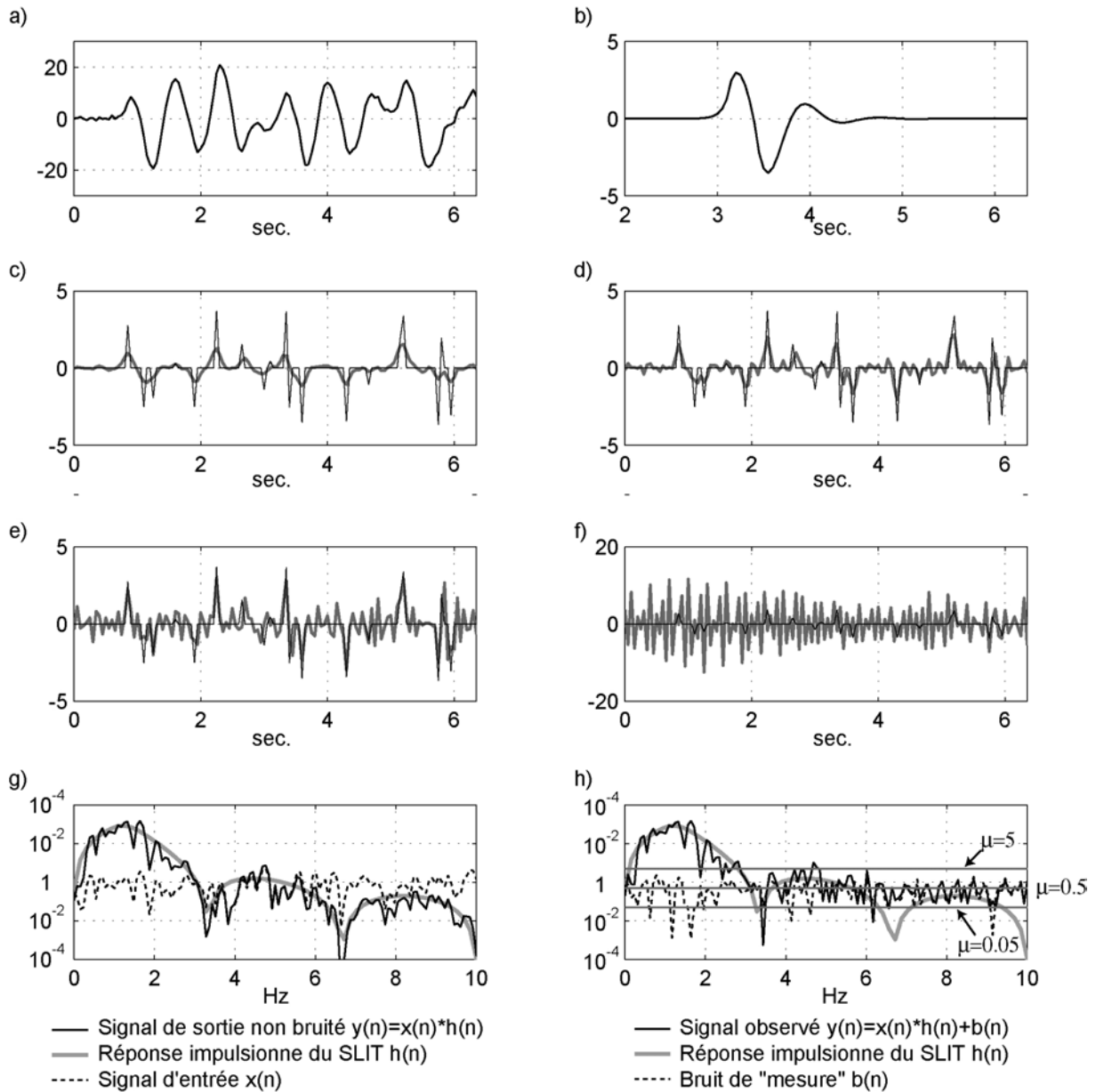


Figure II-9 : Régularisation d'une opération de déconvolution par water-level (équation II-41). En a) signal observé $y(n)$ correspondant à la convolution de l'ondelette $h(n)$ b), avec la réflectivité $x(n)$ (signal en trait fins sur les graphes c), d), e) et f). En c), d), e) et f) trait gras, résultat de la déconvolution pour différentes valeurs de μ . Le graphique g) représente la densité spectrale de puissance du signal d'entrée $x(n)$, de la réponse $h(n)$, et du signal de sortie $y(n)$ non bruité. h) représente aussi la densité spectrale de puissance de $h(n)$, du signal de sortie observé bruité $y(n)$, ainsi que celle du bruit $b(n)$. On a d'ailleurs représenté les différents niveaux de Water-level.

L'augmentation du water-level permet de stabiliser l'opération de déconvolution, mais lisse la solution obtenue. Ainsi, une certaine partie de l'information du signal initial reste tout de même inaccessible et irrémédiablement perdue. Même si cette formulation est facile à mettre en œuvre, la signification physique et le degré de lissage engendré par ce coefficient μ est

souvent difficile à contrôler. On lui préfère sa version temporelle, où la signification des contraintes de régularisation est beaucoup plus explicite (Spikin et Lerner-Lam, 1992).

Outre la régularisation d'un problème inverse par analyse spectrale matricielle basée sur l'étude des valeurs propres de la matrice \mathbf{H} (Fleury, 1994), régulariser un problème inverse consiste à trouver une solution approchée de la vraie solution en incorporant toute forme d'information a priori sur la solution. Ainsi la régularisation d'un problème inverse va consister à trouver un compromis entre une solution $\hat{\mathbf{x}}_0$ fidèle aux données mais souvent instable, et une solution $\hat{\mathbf{x}}_\infty$ plus fidèle aux informations a priori mais moins précise.

De façon générale, une solution régularisée s'obtient par minimisation d'un coût conjoint (Demoment, 1989):

$$\hat{\mathbf{x}}(\mu, \mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} \{J_1(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_0) + \mu J_2(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_\infty)\} \quad (\text{II-42})$$

où J_1 est souvent un critère quadratique sur l'erreur d'estimation : $J_1(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_0) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$. Il nous donne la solution la plus fidèle aux données et au système. J_2 représente quant à lui, la connaissance a priori que l'on veut intégrer dans la solution. Le rôle de J_2 est en quelque sorte de réintroduire lors de l'inversion une partie de l'information ou des propriétés intrinsèques du signal initial qui ont été perdues lors de son filtrage. Ainsi, J_2 peut être un critère de « douceur » de la solution $\hat{\mathbf{x}}$ obtenu en la bornant, ou en bornant sa dérivée ; mais on peut aussi utiliser d'autres critères « intégraux » basés sur l'énergie ou l'entropie de $\hat{\mathbf{x}}$ (Demoment, 1989).

Par exemple, J_2 peut être égale à la variance du signal estimé que l'on veut rendre minimale pour « adoucir » et stabiliser la solution : $J_2(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_\infty) = \|\mathbf{x}\|^2$.

Le paramètre μ , appelé aussi hyperparamètre, est un coefficient jouant le rôle de balance, quantifiant la crédibilité que l'on désire accorder aux mesures par rapport à celle accordée aux informations a priori. Si μ tend vers 0 notre solution sera celle obtenue grâce à une estimation par moindres carrés. Par contre, de fortes valeurs de μ permettront d'intégrer à notre solution plus d'information a priori. On comprend bien que le choix de μ est crucial quant à la qualité de la déconvolution. Malheureusement, son estimation est souvent délicate et n'est pas encore proprement résolue. Il existe néanmoins quelques méthodes permettant d'estimer μ directement à partir des données (Demoment, 1989). Son estimation peut aussi être laissée au

bon jugement de l'opérateur, qui choisira la valeur de μ lui fournissant la solution qu'il estime être la meilleure (Oldenburg, 1981).

L'avantage d'une formulation de la régularisation de l'opération de déconvolution sous la forme d'une minimisation d'une fonction coût, réside dans la liberté du choix de J_2 , laquelle permet ainsi d'intégrer une grande variété d'a priori. En ce qui concerne notre exemple, la minimisation du critère quadratique :

$$\hat{\mathbf{x}}(\mu, \mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \mu \|\mathbf{x}\|^2 \right\} \quad (\text{II-43})$$

nous donne l'expression classique :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (\text{II-44})$$

où μ joue le rôle d'un coefficient de « blanchiment » (pre-whitening coefficient), permettant en quelque sorte de seuiller les très faibles valeurs propres responsables de l'instabilité de l'inversion de la matrice $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ (O'Dowd, 1990).

Enfin, la déconvolution peut aussi être adaptée à l'utilisation simultanée de plusieurs couples de signaux entrée/sortie d'un même filtre. La formulation temporelle est directement obtenue à partir de (II-34), en rajoutant les blocs matriciels correspondant aux nouveaux couples entrée/sortie (Gurrola et al., 1995). Il existe par ailleurs une formulation fréquentielle de cette déconvolution multi-signaux (Oldenburg, 1982; Der et al., 1987). Cette utilisation conjointe de plusieurs signaux permet dans une certaine mesure une stabilisation de l'opération de déconvolution, juste par la redondance de l'information qu'elle engendre.

II.3 La déconvolution aveugle

II.3.1 Un problème inverse mal posé et « très » sous-déterminé

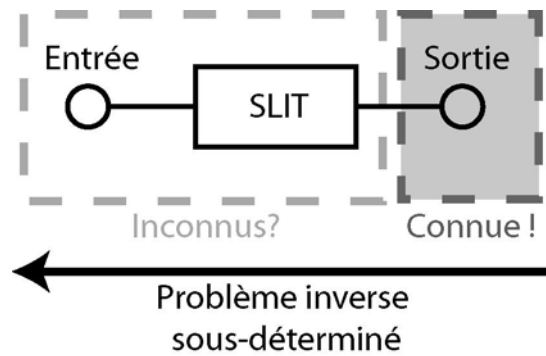


Figure II-10 : Le problème inverse associé à la déconvolution aveugle.

Comme on l'a vu précédemment la déconvolution correspond à la séparation, du point de vue du produit de convolution, d'un signal connu en deux signaux : la réponse impulsionnelle

(connue) et le signal d'entrée au système (inconnu). Dans le domaine spectral⁸, cette opération de déconvolution correspond finalement à une **factorisation** du spectre du signal de sortie par le gain fréquentiel du filtre considéré. Cette factorisation nous donne alors accès au spectre du signal d'entrée, qui était jusque là inconnu.

La déconvolution aveugle est tout d'abord, comme son nom l'indique, une déconvolution. Elle est dite aveugle lorsque l'on ne connaît, ni la réponse impulsionnelle, ni le signal d'entrée du système (Figure II-10). En domaine spectral, elle consiste donc à factoriser le seul signal connu : la sortie du système, en deux signaux inconnus : l'entrée et la réponse du système. Or cette méconnaissance des signaux à séparer va engendrer une forte indétermination quant à la résolution de ce problème inverse. En effet, telle qu'elle est posée maintenant, cette déconvolution aveugle admet une infinité de solutions.

Par exemple considérons un signal dont la TZ est de la forme :

$$Y(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.85z^{-1})(1 - 4z^{-1})}$$

avec un domaine de convergence contenant le cercle unité (paragraphe II.1.7.2). Un tel système peut se factoriser d'une infinité de façons distinctes :

$$Y(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.85z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1 - 4z^{-1})} = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}{(1 - 4z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1 - 0.85z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} = \dots$$

ce qui correspond à autant de déconvolutions aveugles possibles !

D'autre part, d'un point de vue méthode inverse, la déconvolution aveugle consiste donc à estimer deux signaux à partir d'un seul. C'est comme si on voulait estimer deux paramètres à partir d'une seule donnée. On sait très bien que dans ce cas cette inversion admet une infinité de solutions, sauf si on arrive à introduire de l'information supplémentaire lors de l'inversion, comme par exemple, l'utilisation d'une seconde équation indépendante de la première.

Par conséquent, pour que cette déconvolution aveugle admette une unique solution, il est nécessaire d'introduire de l'information supplémentaire lors de l'inversion. Ainsi, suivant les hypothèses faites sur le système ou le signal d'entrée, on distinguera différents types de déconvolution aveugle :

⁸ où l'opération de convolution se résume à un simple produit.

- La déconvolution à phase minimale que nous utiliserons dans ce travail de thèse, ou déconvolution prédictive, sont toutes deux basées plus ou moins implicitement sur l'hypothèse de phase minimale du système étudié.
- La déconvolution par statistiques d'ordre supérieur utilisant comme son nom l'indique les propriétés statistiques du signal aléatoire source et notamment sa non Gaussianité.
- La déconvolution aveugle multicanaux basée sur la redondance de l'information sur un ensemble de signaux correspondant aux sorties de différents systèmes excités par un même signal source.

Par ailleurs, certaines méthodes permettent d'accéder directement au signal d'entrée sans estimer la réponse du système. On parle alors d'égalisation aveugle.

Nous allons maintenant décrire la déconvolution « aveugle » à phase minimale que nous appliquerons, dans les chapitre 3 et 4, à deux types de signaux sismiques afin d'en estimer la fonction source.

II.3.2 La déconvolution à phase minimale

II.3.2.1 Principe de la méthode

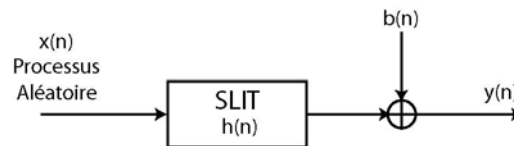


Figure II-11 : Le modèle convolutif associé à la déconvolution à phase minimale

En déconvolution aveugle à phase minimale, le problème direct correspond au modèle convolutif classique (Figure II-11) où le signal de sortie $y(n)$ s'exprime de la façon suivante :

$$y(n) = x(n) * h(n) + b(n) \quad (\text{II-45})$$

avec $x(n)$, $h(n)$ et $b(n)$ correspondant respectivement au signal d'entrée, à la réponse impulsionnelle du système linéaire et au bruit de mesure.

La déconvolution aveugle à phase minimale est basée sur deux hypothèses qualitatives associées respectivement au signal source et au système. D'une façon similaire à l'ensemble des méthodes de déconvolution aveugle ou semi-aveugle SISO (Mendel, 1991; Tugnait et al., 2000), c'est en quelque sorte le caractère stochastique du signal d'entrée $x(n)$ qui nous permet d'extraire du signal de sortie $y(n)$ l'information relative au système $h(n)$. En ce qui concerne la déconvolution aveugle à phase minimale, la première hypothèse consiste à considérer que

le signal d'entrée est un bruit blanc⁹ centré stationnaire à l'ordre deux, de covariance σ^2 (Robinson, 1957; Brillinger et Rosenblatt, 1967b; Robinson, 1967).

Ainsi, en considérant la fonction d'autocorrélation $C_{y(2)}(n)$ du signal de sortie $y(n)$:

$$C_{y(2)}(n) = C_{x(2)}(n) * C_{h(2)}(n) + C_{b(2)}(n) \quad (\text{II-46})$$

et en négligeant le terme bruit additif $b(n)$, $C_{b(2)}(n) \approx 0$, on obtient la formule des interférences :

$$C_{y(2)}(n) = \underbrace{\sigma^2 \delta(n)}_{C_{x(2)}} * \underbrace{h(n) * h^*(-n)}_{C_{h(2)}} \quad (\text{II-47})$$

Après, transformée en z et ou transformée de Fourier, cette équation (II-47) devient :

$$\begin{aligned} TZ &\rightarrow \gamma_{yy}(z) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\sigma^2 \\ TFr &\rightarrow \gamma_{yy}(\lambda) = |H(\lambda)|^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{II-48})$$

Ainsi, comme nous le montrent ces équations, l'autocorrélation de la sortie $y(n)$ d'un SLIT excité par un bruit blanc stationnaire à l'ordre 2, nous donne directement accès à l'amplitude spectrale $|H(\lambda)|$ du filtre.

Malheureusement, pour définir un signal, l'amplitude spectrale ne suffit pas. D'ailleurs, à une amplitude spectrale donnée correspond une infinité de signaux distincts (Figure II-12). On a donc besoin d'une information supplémentaire sur le SLIT : c'est l'hypothèse de phase minimale. En effet, les signaux à phase minimale appartiennent à une classe de signaux pour laquelle il existe une relation entre amplitude et phase spectrale.

⁹ C'est-à-dire un processus aléatoire décorrélé : $C_{x(2)}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$.

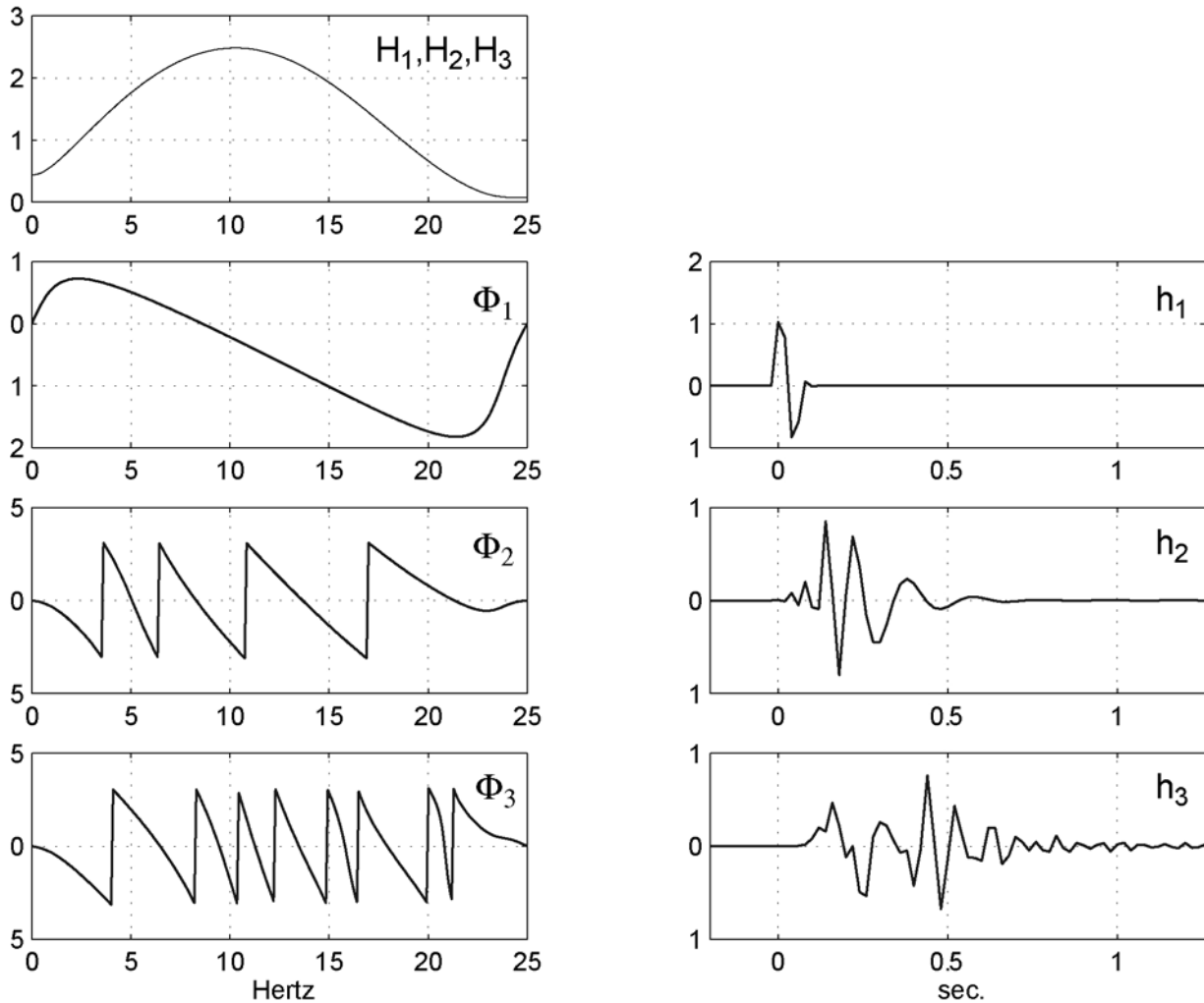


Figure II-12 : Non unicité de la séquence associée à une amplitude spectrale donnée. Les 3 ondelettes distinctes h_1 , h_2 et h_3 ont pourtant la même amplitude spectrale $H_1=H_2=H_3$ mais des phases Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 différentes.

Ainsi, sous l'hypothèse d'un système à phase minimale, l'estimation de son amplitude spectrale nous permettra d'en calculer la phase et donc la fonction de transfert. Le signal d'entrée s'obtient alors par simple déconvolution du signal de sortie par ce filtre à phase minimale estimé.

Dans le paragraphe suivant nous allons, d'une part, expliquer comment le caractère phase minimale d'un système nous permet d'en retrouver la phase seulement à partir de son amplitude spectrale, et d'autre part, tenter de rendre un peu plus intuitif cette notion de phase minimale qui paraît à première vue très abstraite.

II.3.2.2 Qu'est ce qu'un signal à phase minimale ?

La causalité d'un signal implique que la partie imaginaire et la partie réelle de sa transformée de Fourier soient reliées entre elles par la transformée de Hilbert (Petit, 1995):

$$\begin{aligned} X_R(\nu) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_I(\sigma)}{\nu - \sigma} d\sigma \\ X_I(\nu) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_R(\sigma)}{\nu - \sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{II-49})$$

où $X(\nu) = X_R(\nu) + iX_I(\nu)$ et $P \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$ représente l'intégration par partie principale de Cauchy.

En physique, ces relations correspondent aux relations classiques de Kramers-Krönig utilisées en électromagnétisme ou en sismologie (Aki et Richards, 1980).

D'une façon analogue, il existe une sous-classe des signaux stables et causaux, appelés signaux à phase minimale pour lesquels le logarithme de l'amplitude $\log(|X(\nu)|)$ et de la phase $\Phi_X(\nu)$ de sa transformée de Fourier sont reliées entre elles par transformée de Hilbert :

$$\begin{aligned} \Phi_X(\nu) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(|X(\sigma)|)}{\nu - \sigma} d\sigma \\ \log(|X(\nu)|) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_X(\sigma)}{\nu - \sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{II-50})$$

Même si on comprend bien l'intérêt de ces relations de Bode-Bayard, qui nous permettent de reconstituer un spectre à partir uniquement de la connaissance de son amplitude ou de sa phase, elles ne nous renseignent pas vraiment sur ce que sont ces signaux à phase minimale.

C'est ce que nous allons essayer de comprendre en analysant quelles sont les implications de telles relations sur des signaux discrets.

Considérons tout d'abord, le logarithme de la transformée de Fourier en fréquence réduite $X(\lambda)$ de la séquence $x(n)$:

$$\log(X(\lambda)) = \log(|X(\lambda)|) + i\Phi_X(\lambda) \quad (\text{II-51})$$

où $\Phi_X(\lambda)$ correspond à la phase de la transformée en fréquences réduites $X(\lambda)$. Les termes $\log(|X(\lambda)|)$ et $i\Phi_X(\lambda)$ peuvent aussi être considérés respectivement comme la partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier de la séquence

$$\hat{x}(n) = TF_r^{-1}(\log(X(\lambda))) \quad (\text{II-52})$$

aussi appelé cepstre de $x(n)$ (Childers et al., 1977; Silvia et Robinson, 1978).

Ainsi, si $x(n)$ est un signal à phase minimale, la partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier de son cepstre vérifieront les relations de Kramers-Kronig (II-49). Son cepstre est donc causal. Or comme le codisque de convergence de la transformée en Z d'une

séquence stable et causale, ici $\hat{H}(z) = \log(H(z))$, doit contenir le cercle unité¹⁰ (paragraphe 1.6), les pôles et zéros de $H(z)$ doivent tous être à l'intérieur du cercle unité. Par conséquent, si le signal à phase minimale $x(n)$ peut être considéré comme la réponse impulsionnelle d'un SLIT discret, son filtre inverse sera donc stable et causal (puisque les pôles et zéros du filtre inverse sont aussi à l'intérieur du cercle unité, paragraphe II.1.7.2).

De façon générale, on peut définir tout un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes caractérisant un SLIT discret stable, causal et à phase minimale de réponse impulsionnelle $h(n)$ (Silvia et Robinson, 1979; Eisner, 1984) :

$$\begin{aligned}
 & h(n) \text{ est à phase minimale (i)} \\
 \Leftrightarrow & \boxed{\begin{aligned} \Phi_X(\lambda) &= TH_r(\log(|X(\lambda)|)) \\ \log(|X(\lambda)|) &= -TH_r(\Phi_X(\lambda)) \end{aligned}} \text{ (Bode-Bayard) (ii)} \\
 \Leftrightarrow & \text{ Les pôles et zéros de } H(z) \text{ sont à l'intérieur du cercle unité (iii)} \\
 \Leftrightarrow & H(z) \text{ est causalement inversible : } H^{-1}(z) \text{ est stable et causal (iv)} \\
 \Leftrightarrow & |\Phi_H(\lambda)| \text{ est minimale (v)} \\
 \Leftrightarrow & \text{ La valeur absolue du retard de phase } \left| -\frac{\Phi_H(\lambda)}{2\pi\lambda} \right| \text{ est minimale (vi)} \\
 \Leftrightarrow & \text{ La valeur absolue du retard de groupe } \left| -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_H(\lambda)}{d\lambda} \right| \text{ est minimale (vii)} \\
 \Leftrightarrow & \text{ Système dont la réponse est la plus rapide :} \\
 & \sum_{n=0}^N |s(n)|^2 \leq \sum_{n=0}^N |h(n)|^2 \text{ avec } |S(\lambda)| = |H(\lambda)| \text{ (viii)}
 \end{aligned} \tag{II-54}$$

Même si le raisonnement précédent nous permet d'un peu mieux appréhender les équivalences (II-54 i-iv), cela ne nous renseigne toujours pas sur le choix de l'appellation « phase minimale » et le lien avec les propositions (II-54 v-viii). Dans ce qui va suivre nous allons essayer de rendre ce lien et ce nom de « phase minimale » un peu plus intuitif. Il ne s'agit en aucun cas d'une démonstration, qui nous est d'ailleurs fournie par les travaux de Robinson ou de Eisner (Robinson, 1954; Eisner, 1984). Nous allons nous intéresser tout d'abord à l'information associée à la phase d'un spectre, ainsi qu'aux notions de retard de phase et de retard de groupe. Alors que l'amplitude spectrale nous renseigne essentiellement

¹⁰ On peut montrer en effet, que si z_0 est un pôle ou un zéro de $H(\lambda)$, c'est un pôle de $\hat{H}(\lambda)$.

sur le contenu énergétique global d'un signal, la phase de son spectre nous apporte une information relative à la répartition temporelle de cette énergie. Les retards de groupe et de phase n'ont, quant à eux, une signification physique claire seulement pour les signaux à bande étroite (Scherbaum, 1996; Mari et al., 1997) . Pour de tels signaux, le retard de groupe représente le retard de propagation de l'enveloppe du signal, ou si on préfère le retard de propagation du centre de gravité énergétique du signal. Le retard de phase quant à lui correspond plutôt au retard de la sinusoïde ou porteuse (Figure II-13).

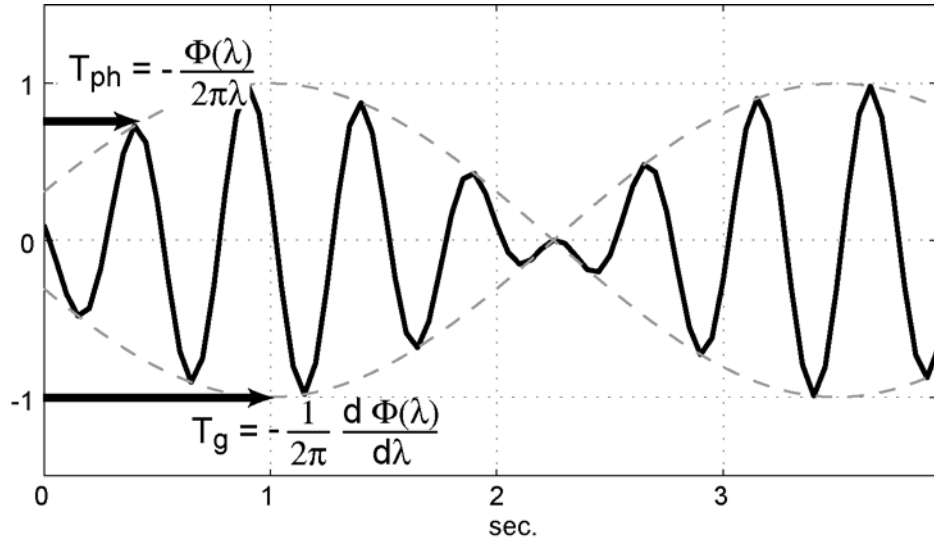


Figure II-13 : Définition du retard de groupe T_g et du retard de phase T_{ph} pour une onde stationnaire $x(n)=\cos(2\pi\lambda_0 n)\cos(2\pi\lambda_1 n)$ avec $\lambda_0 \gg \lambda_1$.

Par exemple, d'après le théorème du retard en fréquence :

$$TFr[x(n-k)] = e^{-2\pi i \lambda k} TFr[x(n)] \quad (II-54)$$

retarder un signal quelconque de k , c'est-à-dire retarder l'apparition de son énergie, se traduit par une diminution de la phase de son spectre d'une composante linéaire de la forme : $2\pi\lambda k$. Le retard de groupe et le retard de phase augmentent alors tous deux de la même quantité k . Ainsi, on conçoit bien que plus la valeur absolue du retard de groupe ou de phase de la fonction de transfert d'un filtre est faible, plus son énergie sera concentrée au début de sa réponse impulsionnelle, conformément aux équivalences (II-54 v-viii).

Nous allons maintenant appréhender le lien entre les propositions (II-54 i-iv) et les propositions (II-54 v-viii).

Considérons maintenant la sortie $y(n)$ d'un SLIT discret $h(n)$ de type FIR excité par un signal $x(n)$. Le filtre $h(n)$ étant de type FIR, chaque sortie $y(n)$ est donc une combinaison linéaire des $L+1$ entrées précédentes (II-6). Considérons maintenant que le filtre $h(n)$ est stable, causal,

mais pas à phase minimale. On sait que dans ce cas le barycentre énergétique de sa réponse impulsionnelle est retardé d'une quantité k . Dans l'exemple de la Figure II-14, k est égal à 3. Or comme $y(n)$ est la somme pondérée de $L+1$ échantillons d'entrée par $h(n)$, $y(n)$ comportera essentiellement l'information relative aux échantillons $[h(n-4), h(n-3), h(n-2)]$ pour lesquels $h(n)$ est maximale. Ainsi la transmission de l'information associée au signal $x(n)$ sera retardée d'environ trois échantillons lors de son filtrage (Figure II-14).

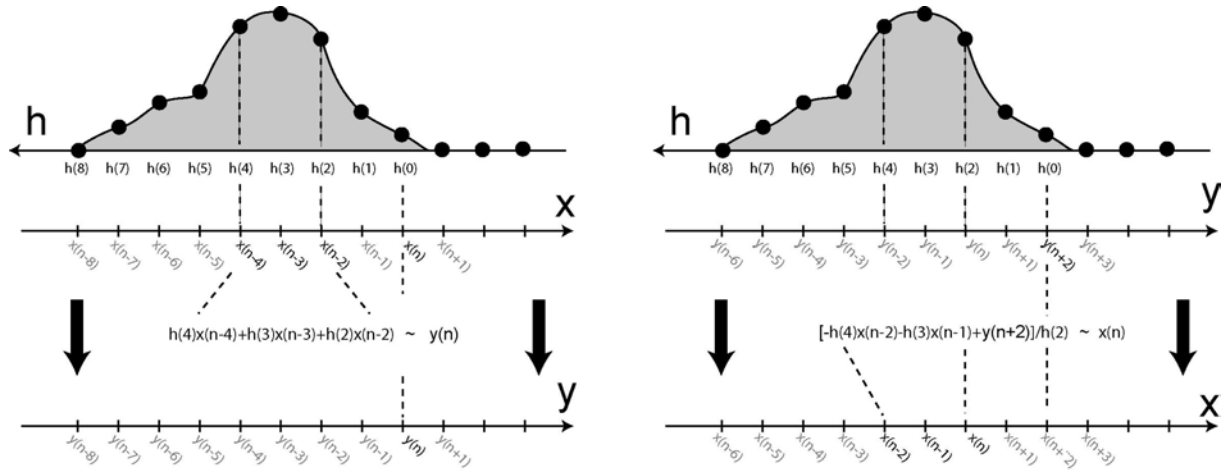


Figure II-14 : Lien entre la phase minimale de $h(n)$ et la causalité et stabilité du filtre inverse $h^{-1}(n)$. A gauche, filtrage de $x(n)$ par un filtre à phase non minimale $h(n)$, à droite, opération de déconvolution de $y(n)$ et filtre inverse associé.

Inversement, si on cherche le filtre inverse $h^{-1}(n)$ qui permet d'obtenir $x(n)$ à partir de $y(n)$, l'information associée à la sortie $x(n)$ de ce filtre inverse n'est donc pas associée principalement à l'échantillon $y(n)$ mais plutôt à l'échantillon $y(n+3)$. C'est dire des échantillons d'entrée futurs. Le filtre inverse $h^{-1}(n)$ n'est donc pas causal (Figure II-14) !

Ainsi, du point de vue mathématique, la notion de phase minimale est complètement définie par les relations de Bode-Bayard (II-54-ii) ou la position des pôles et des zéros (II-54-iii). Si on adopte un point de vue plus physique, on peut dire que le caractère à phase minimale d'un système est associé à sa causalité et à la causalité de son filtre inverse, ainsi qu'à la répartition temporelle de l'énergie de sa réponse impulsionnelle (vitesse de réponse du système).

II.3.2.3 Indétermination liée à l'autocorrélation : Filtres spectralement équivalents

Considérons que $h(n)$ est un SLIT de type FIR comportant $L+1$ échantillons non nuls. Sa fonction d'autocorrélation $C_{h(2)}(n)$ est aussi de durée limitée et comporte $2L+1$ échantillons non nuls. Ainsi, comme nous le montre l'équation II-48, la Transformée en Z de l'autocorrélation de $h(n)$, comporte non seulement les zéros de sa fonction de transfert, mais

aussi leurs inverses conjugués (et Figure II-15) ; de sorte qu'il nous est alors impossible d'identifier les vrais zéros de $h(n)$ de leur image par rapport au cercle unité.

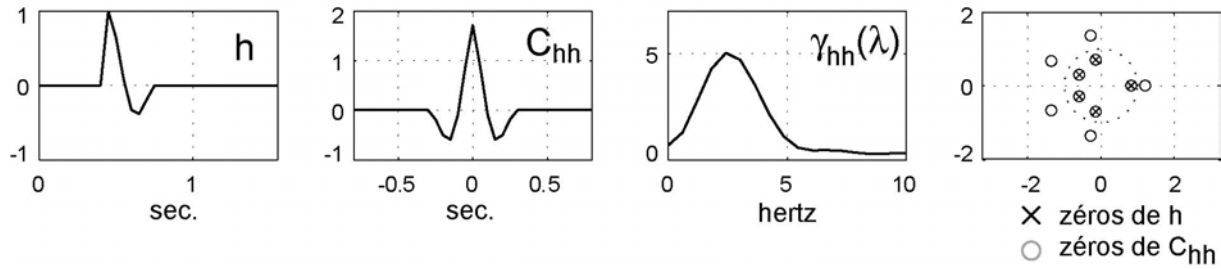


Figure II-15 : Répartition des zéros de la fonction d'autocorrélation $C_{h(2)}(n)$ en fonction de ceux de $h(n)$.

Néanmoins, contrairement au cas général de la Figure II-12, nous n'avons plus une infinité de signaux spectralement équivalents au spectre de $C_{h(2)}(n)$, en raison de la dimension finie du support temporel de la fonction d'autocorrélation. En effet, si l'autocorrélation $C_{h(2)}(n)$ d'un système $h(n)$ a un support de longueur fini comportant $2L+1$ échantillons non nuls, on peut alors dire qu'il s'agit d'un FIR comportant $L+1$ échantillons non nuls. Toute l'information de $h(n)$ peut donc être modélisée par seulement $L+1$ points. Ainsi, connaissant les zéros de l'autocorrélation $C_{h(2)}(n)$, on pourra construire tout un ensemble de signaux en ne choisissant qu'un des deux zéros de chaque paire de zéros en position inverse conjuguée par rapport au cercle unité (Figure II-16). Pour préserver le caractère réel de $h(n)$, il conviendra de travailler sur des couples de zéros en paire conjuguée l'un de l'autre. Ainsi, au lieu d'avoir une infinité de signaux spectralement équivalents à $C_{h(2)}(n)$, on n'obtient seulement au plus 2^L réponses impulsionnelles ou ondelettes distinctes.

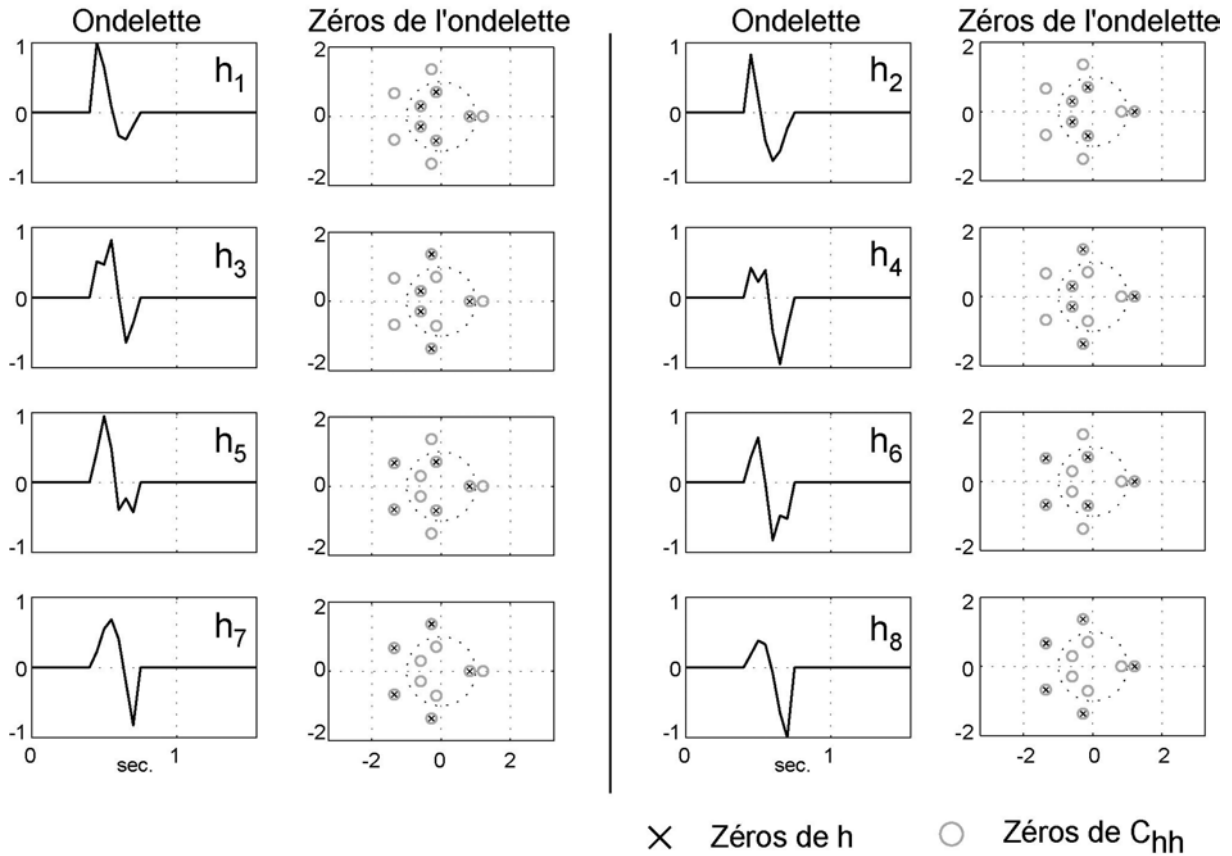


Figure II-16 : Ondelettes de 6 échantillons associées à une même amplitude spectrale.

On remarquera que même si toutes ces ondelettes ont exactement la même amplitude spectrale, leur aspect temporel ainsi que leur phase sont complètement différents (Figure II-16). La déconvolution aveugle à phase minimale consiste donc à choisir parmi toutes ces ondelettes celle à phase minimale, correspondant au filtre dont la réponse est la plus rapide (Figure II-17). Cette figure qui représente, pour chacune des 8 ondelettes h_1, \dots, h_8 , la phase $\Phi(\lambda)$ de leur spectre, leur retard de phase $T_{ph}(\lambda)$, leur retard de groupe $T_g(\lambda)$, et l'évolution temporelle de leur énergie, nous permet d'illustrer les propositions (II-54 v), (II-54 vi), (II-54 vii) et (II-54 viii). En effet, comme on peut le voir l'ondelette à phase minimale $h_1(n)$, qui a tous ses zéros à l'intérieur du cercle unité (Figure II-16), est celle qui a, en moyenne, une phase (Figure II-17 a et b), un retard de phase (Figure II-17 c et d) et un retard de groupe (Figure II-17 e et f) les plus faibles. D'autre part, d'un point de vue énergétique, le filtre associé à h_1 est celui qui répond le plus rapidement (Figure II-17 g).

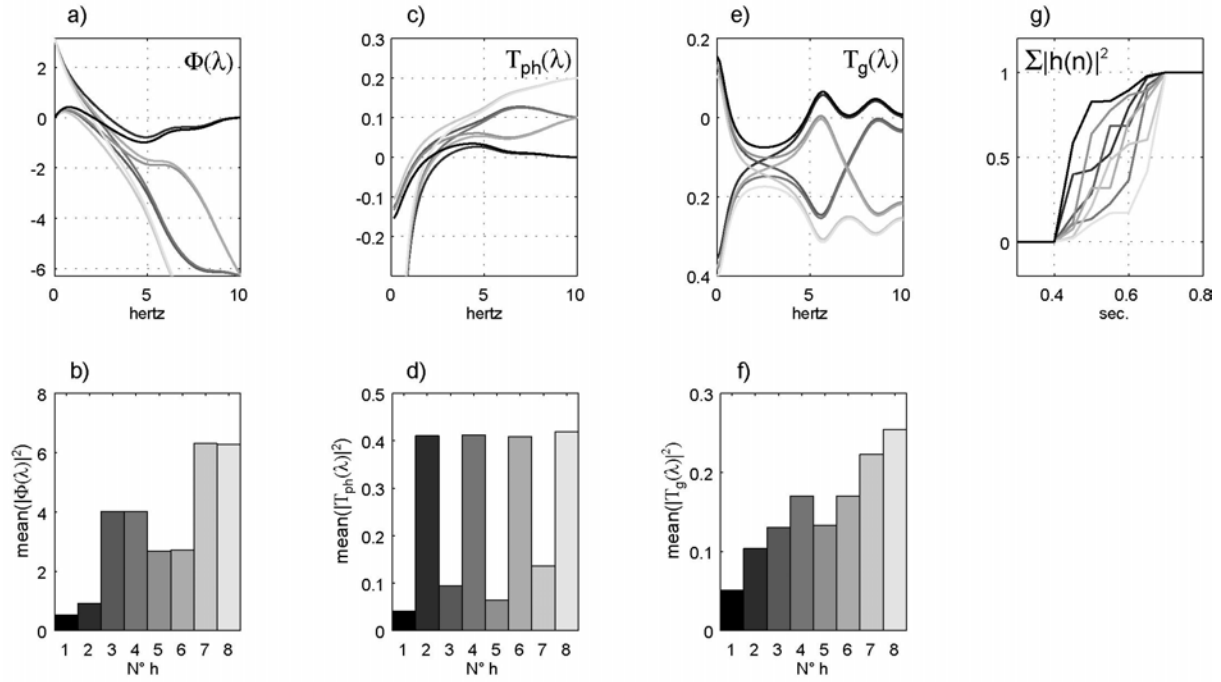


Figure II-17 : Caractéristiques de la phase $\Phi(\lambda)$, du retard de phase T_{ph} , du retard de groupe T_g et de l'énergie des 8 ondelettes de la Figure II-16. En a) phase des différentes ondelettes, en b) leur distance à l'axe des abscisses $\Phi=0$, ou amplitude moyenne ; en c) retard de phase des ondelettes h_i , en d) leur amplitude moyenne respective ; en e) retard de groupe T_g des ondelettes h_i , en f) leur amplitude moyenne respective ; enfin en g) l'énergie de chacune des ondelettes h_i . L'ondelette à phase minimale (h_1 Figure II-16) correspond à l'ondelette qui a une phase, un retard de phase et un retard de groupe d'amplitude moyenne la plus minimale.

II.3.2.4 Déconvolution non paramétrique à phase minimale

Les hypothèses de blancheur et de stationnarité du signal d'entrée nous placent dans une configuration identique à celle de la théorie de l'estimation spectrale de signaux aléatoires. Nous allons donc utiliser ces techniques d'estimation spectrale, ne serait ce que pour estimer l'amplitude spectrale du système à identifier. Nous nous intéresserons à deux méthodes distinctes d'estimation de l'ondelette à phase minimale. La première est basée sur une estimation spectrale non paramétrique classique suivi de l'utilisation des relations de Bode-Bayard (II-50) : estimation non paramétrique à phase minimale. La seconde nous fournit directement l'ondelette à phase minimale par modélisation paramétrique : Déconvolution prédictive (Robinson, 1967).

3.2.4.1 Algorithme de résolution

L'estimation de l'ondelette¹¹ à phase minimale par les relations de Bode-Bayard (II-50) se décompose en deux étapes. La première consiste à estimer la densité spectrale de puissance

¹¹ En sismologie, on parle d'ondelette pour désigner un signal transitoire $h(n)$ à énergie finie, par opposition à un signal stationnaire, comme $x(n)$ à énergie infinie mais puissance finie. La signification physique de l'ondelette peut-être diverse suivant le problème que l'on étudie et la façon dont il est posé. L'ondelette peut être comme dans notre exemple, la réponse d'un filtre, mais elle peut aussi représenter le mouvement sismique à la source,

(dsp) $\gamma_{y(2)}(\lambda)$ de la séquence $y(n)$ par les méthodes classiques basées sur l'analyse de Fourier : périodogramme ou corrélogramme.

Le périodogramme dans sa version la plus basique (Schuster, 1898) consiste tout simplement à calculer le module au carré de la transformée de Fourier de $y(n)$ et de le normaliser par la durée du signal afin de le rendre homogène à une densité de puissance :

$$\hat{\gamma}_{y(2)}(\lambda) = \frac{T_e}{N} |TFr[y(n)]|^2 \quad (\text{II-55})$$

où N est le nombre total d'échantillons de $y(n)$.

Malheureusement, cet estimateur présente une très forte variance qui le rend inutilisable en pratique. Depuis, plusieurs variantes ont été proposées afin de réduire la variance du périodogramme, comme entre autres, l'estimateur de Welch (Welch, 1967). Il consiste tout d'abord à découper le signal utile $y(n)$ en K fenêtres recouvrantes $y_i(n)$ de M échantillons (classiquement 50% de recouvrement). Le périodogramme est ensuite calculé sur chaque fenêtre de signal que l'on aura préalablement apodisée afin de réduire l'effet des lobes secondaires :

$$\hat{\gamma}_{y_i(2)}(\lambda) = \frac{T_e}{M} |TFr[w(n)y_i(n)]|^2 \quad (\text{II-56})$$

Ces périodogrammes élémentaires sont enfin moyennés pour en diminuer la variance. On obtient ainsi l'estimateur de Welch de la dsp de $y(n)$:

$$\hat{\gamma}_{y(2)}(\lambda) = \frac{A}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{\gamma}_{y_i(2)}(\lambda) \quad (\text{II-57})$$

A est un coefficient de pondération dont l'objectif est de compenser la perte d'énergie due à l'apodisation :

$$A = \frac{M}{\sum_{m=0}^{M-1} w(m)^2} \quad (\text{II-58})$$

Le choix de la fenêtre d'apodisation et de la durée M des fenêtres $y_i(n)$ dépendent d'un compromis entre des exigences contradictoires : biais, variance et niveau des lobes secondaires (Max et Lacoume, 1996).

Le corrélogramme est basé sur les relations de Wiener-Khintchine qui stipulent, entre autres, que la densité spectrale¹² d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_{y(2)}(\nu) = TF(C_{y(2)}(t)) \quad (\text{II-59})$$

Ainsi, le corrélogramme est la transformée de Fourier de $2P+1$ coefficients de l'estimateur non-biaisé $\hat{c}_{y(2)}(n)$ de l'autocorrélation du signal $y(n)$:

$$\hat{\gamma}_{y(2)}(\lambda) = T_e \sum_{m=-P}^P \hat{c}_{y(2)}(m) \exp(-2\pi i \lambda m) \quad (\text{II-60})$$

Le rôle de cette restriction à une certaine plage de coefficients de la fonction d'autocorrélation est de réduire la variance de notre estimation en évitant la variance importante de $\hat{c}_{y(2)}(m)$ pour les grandes valeurs de m . Blackman-Tukey suggèrent d'ailleurs de se limiter à des valeurs de P de l'ordre de $N/10$, où N est le nombre d'échantillons de $y(n)$. De plus, afin de minimiser les effets des lobes secondaires, l'estimateur de Blackman-Tukey apodise les coefficients de l'autocorrélation par une fenêtre de pondération $w(m)$:

$$\hat{\gamma}_{yy}(\lambda) = T_e \sum_{m=-P}^P w(m) \hat{c}_{yy}(m) \exp(-2\pi i \lambda m) \quad (\text{II-61})$$

Enfin, on veillera à ne pas utiliser une fenêtre de pondération dont la TF présente des lobes négatifs pour certaines fréquences, comme par exemple la fenêtre de Bartlett ou Parzen (Max et Lacoume, 1996), afin de respecter le caractère positif de toute dsp.

Après avoir estimé la dsp de notre signal par l'une de ces deux méthodes, nous allons estimer la phase de notre ondelette à phase minimale par la relation :

$$\hat{\Phi}_H(\lambda) = TH \left[\log \left(\sqrt{\hat{\gamma}_{y(2)}(\lambda)} \right) \right] \quad (\text{II-62})$$

Quant à la transformée de Hilbert d'un signal numérique $x(n)$, elle peut être calculée par exemple, en utilisant sa formulation fréquentielle :

$$TH[x(n)] = TFr^{-1} [-i \operatorname{sgn}(\lambda) TFr[x(n)]] \quad (\text{II-63})$$

L'ondelette équivalente à phase minimale $h_{min}(n)$ est alors calculée par transformée de Fourier inverse :

¹² Suivant le type de signal il s'agira soit d'une densité spectrale d'énergie (signal transitoire), soit d'une densité spectrale de puissance (signal stationnaire). D'ailleurs, on rappelle au lecteur que nos estimateurs « spectraux » sont des estimateurs de densité spectrale de puissance et qu'implicitement ils concernent donc des signaux stationnaires.

$$h_{\min}(n) = TFr^{-1} \left[\sqrt{\hat{\gamma}_{y(2)}(\lambda)} \exp(i\hat{\Phi}_H(\lambda)) \right] \quad (\text{II-64})$$

3.2.4.2 Quelques remarques pratiques de mise en œuvre

Même si cette méthode est plutôt rapide et facile à implémenter, son utilisation nécessite de prendre quelques précautions notamment pour deux raisons.

D'une part, la phase minimale est calculée à partir du logarithme de l'amplitude spectrale. Or ce logarithme amplifie fortement les faibles valeurs du spectre qui correspondent malheureusement aux plus bruitées.

D'autre part, l'utilisation de la transformée de Hilbert contribue à délocaliser sur l'ensemble de l'axe fréquentiel, l'influence sur la phase de l'amplitude spectrale sur une bande fréquentielle donnée. Ainsi, une erreur sur l'amplitude spectrale localisée en fréquence modifiera la phase dans son intégralité et pas seulement sur une bande de fréquence limitée (Ellender, 1986).

Ainsi, pour obtenir une bonne estimation de l'ondelette à phase minimale, il faudra soigner l'estimation de l'amplitude spectrale en limitant sa variance et le niveau de bruit. Malheureusement contrairement à l'intercorrélation de deux signaux, l'autocorrélation ne permet pas d'éliminer le bruit et ceci quelle que soit son origine : bruit de mesure, inadéquation au modèle, présence d'ondes parasites, etc... En effet, dans le cas le plus favorable où le bruit $b(n)$ et la séquence d'entrée $x(n)$ sont décorrélés $C_{xb}(n)=0$, l'autocorrélation du signal observé est la somme de l'autocorrélation du signal utile et de celle du bruit :

$$C_{y(2)}(n) = h(n) * h^*(-n) * C_{x(2)}(n) + C_{b(2)}(n) \quad (\text{II-65})$$

La meilleure solution consiste à limiter autant que possible ce bruit en soignant la qualité de l'enregistrement ou en l'atténuant par filtrage de Wiener (Wiener, 1949; Robinson et Treitel, 1967).

De plus, afin de limiter la variabilité de notre estimation de la phase minimale, on veillera tout particulièrement à limiter la variance de l'estimation spectrale et l'effet des lobes secondaires. Ainsi, pour une estimation spectrale par corrélogramme, P devra être choisi le plus petit possible tout en préservant l'information. En d'autres termes, on se limitera aux plus fortes valeurs de la fonction d'autocorrélation. En ce qui concerne la fenêtre d'apodisation, elle sera choisie de manière à limiter les niveaux parasites dans la bande atténuée tout en contrôlant le biais qu'elle engendre sur notre estimation spectrale.

A titre de remarque, il existe une méthode itérative d'estimation de la phase à partir de l'amplitude spectrale (Quatieri et Oppenheim, 1981). Cette méthode présente l'avantage de ne pas recourir au logarithme de l'amplitude spectrale qui, comme on l'a vu, peut diverger pour de faibles valeurs. Malheureusement, la convergence de cette solution itérative n'est pas assurée.

II.3.2.5 Déconvolution prédictive

Cette méthode, développée dans les années soixante par Robinson (Robinson, 1967; Peacock et Treitel, 1969), a pour objectif l'estimation du filtre inverse de l'équivalent à phase minimale $h_{min}(n)$ du filtre $h(n)$. Elle est basée sur la théorie de filtrage optimal de Wiener (Wiener, 1949), qui consiste à trouver le filtre passage $f(n)$ entre un signal observé $y(n)=h(n)*x(n)$ et un signal désiré $z(n)$, en minimisant l'erreur quadratique I entre la sortie de ce filtre $\hat{z}(n)$ et le signal désiré (Figure II-18-a)). Dans notre cas, le signal désiré $z(n)$ est $x(n)$, c'est-à-dire un bruit blanc stationnaire.

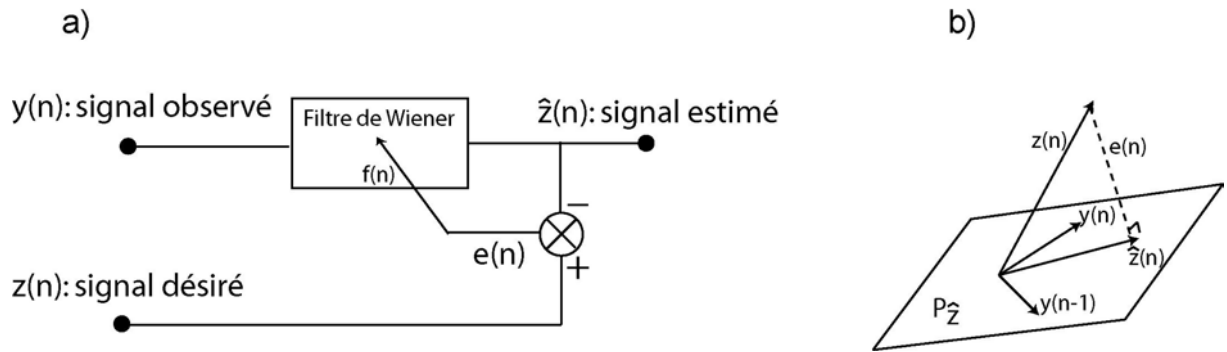


Figure II-18 : a) modèle associé au filtrage optimale de Wiener, b) Principe d'orthogonalité.

Ainsi, puisque la sortie de notre filtre optimal $\hat{z}(n)$ est une combinaison linéaire de $p+1$ échantillons du signal observé,

$$\hat{z}(n) = \sum_{k=0}^p f(k)y(n-k) \quad (\text{II-66})$$

l'erreur d'estimation $e(n)$ s'exprime de la façon suivante :

$$e(n) = z(n) - \hat{z}(n) = z(n) - \sum_{k=0}^p f(k)y(n-k) \quad (\text{II-67})$$

La minimisation de « l'énergie » de l'erreur, conduit à minimiser la quantité :

$$I = E\{e(n)^2\} = E\left\{\left(z(n) - \sum_{k=0}^p f(k)y(n-k)\right)^2\right\} \quad (\text{II-68})$$

En effet, puisque l'on se place dans une optique de traitement statistique de signaux aléatoires, la norme utilisée pour mesurer notre erreur d'estimation est associée à l'espérance mathématique par l'intermédiaire du produit scalaire $E\{x(n)y(n)\}$.

Par différentiation par rapport aux coefficients $f(k)$ et en posant $C_{y(2)}(k)=E\{y(n)y(n+k)\}$, on obtient finalement les équations de Wiener-Hopf :

$$\sum_{k=0}^p f(k)C_{yy}(n-k) = C_{zy}(n) \text{ avec } n = 0, \dots, p \quad (\text{II-69})$$

Or, puisque l'on cherche à retrouver $x(n)$, on choisira donc $z(n)$ tel que $z(n)=x(n)$. Dans ce cas, on a $C_{zy}(n)=h(-n)\sigma^2$. Ainsi l'équation de Wiener-Hopf peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} C_{y(2)}(0) & C_{y(2)}(1) & \dots & C_{y(2)}(p) \\ C_{y(2)}(1) & C_{y(2)}(0) & \dots & C_{y(2)}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{y(2)}(p) & C_{y(2)}(p-1) & \dots & C_{y(2)}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0)\sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-70})$$

Si on appelle $\mathbf{C}_{y(2)}^{p+1}$ la matrice d'autocorrélation de $y(n)$, $\mathbf{f} = [f(0) \ f(1) \ \dots \ f(p)]^T$ et $\mathbf{I}_\sigma = [h(0)\sigma^2 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, le système (II-70) s'exprime sous forme plus condensée :

$$\mathbf{C}_{y(2)}^{p+1} \mathbf{f} = \mathbf{I}_\sigma \quad (\text{II-71})$$

\mathbf{C}_{yy}^{p+1} étant une matrice de Toeplitz¹³, une inversion robuste et rapide de ce système sera obtenue par l'algorithme de Levinson (Levinson, 1947).

Pour rendre ces équations un peu plus parlantes, on peut en donner une interprétation géométrique en considérant $z(n)$, $\hat{z}(n)$ et $e(n)$ comme des vecteurs et en se plaçant dans le cas d'un filtre $f(n)$ d'ordre 2. D'après l'équation (II-66), $\hat{z}(n)$ appartient au plan $P_{\hat{z}}$ engendré par $y(n)$ et $y(n-1)$ (Figure II-18 -b)). Par ailleurs, $\hat{z}(n)$ est tel que sa distance $e(n)$ au vecteur $z(n)$ soit minimale. $\hat{z}(n)$ est le vecteur de $P_{\hat{z}}$ tel que l'erreur $e(n)$ soit orthogonale à $P_{\hat{z}}$, ou si on préfère, $\hat{z}(n)$ est donc la projection orthogonale de $z(n)$ sur $P_{\hat{z}}$ (Figure II-18-b)) :

$$e(n) \perp \hat{z}(n) \quad (\text{II-72})$$

¹³ Une matrice de Toeplitz est une matrice telle que les éléments de ses diagonales Nord-Ouest Sud-Est sont identiques.

C'est pour cette raison que les équations de Wiener-Hopf sont aussi appelées équations normales.

Ainsi l'inversion du système matriciel (II-71), nous donne une estimation d'un filtre blanchisseur du signal aléatoire $y(n)$. Maintenant, la question est de savoir de quel type de filtre il s'agit, et notamment de savoir s'il s'agit d'un filtre à phase minimale.

Tout d'abord, $f(n)$ est un filtre stable puisqu'il s'agit d'un FIR (paragraphe II.1.8.1). D'autre part, il est causal par construction puisque sa sortie ne fait intervenir que les échantillons présents et passés de la fonction d'autocorrélation (signal d'entrée). Par conséquent, $f(n)$ correspond au filtre inverse stable et causal d'un filtre de fonction d'autocorrélation $C_{y(2)}(n)$ avec $n=0, \dots, p$. Donc, d'après (II-54-iv), le filtre estimé par inversion de (II-71) est le filtre inverse à minimum de phase associé au filtre de fonction d'autocorrélation $C_{y(2)}(n)$ avec $n=0, \dots, p$. Ainsi, si le filtre $h(n)$ est réellement à phase minimale, $f(n)$ sera le filtre inverse de $y(n)$, nous permettant d'obtenir $x(n)$ et d'identifier $h(n)=f^l(n)$ seulement à partir de $y(n)$.

Enfin, on parle de déconvolution prédictive en raison de son lien avec la prédiction linéaire de séries aléatoires ainsi qu'avec les estimations spectrales paramétriques (Robinson, 1967; Peacock et Treitel, 1969; Kay, 1988).

Néanmoins, étant donné que cet algorithme de déconvolution à phase minimale sous-entend implicitement que le système à identifier est de type AR, il nous a paru moins adapté pour modéliser la fonction source d'un séisme, plutôt de type MA, que l'algorithme précédent utilisant les relations de Bode-Bayard. C'est la raison pour laquelle malgré la meilleure stabilité et rapidité a priori de la déconvolution prédictive, nous avons préféré dans un premier temps utiliser dans les Chapitres 3 et 4, l'algorithme non paramétrique de déconvolution à phase minimale par relations de Bode-Bayard. Bien entendu, dans le futur, il sera intéressant de comparer l'efficacité de ces deux méthodes.

II.3.3 Conclusions et perspectives

L'objectif de tous ces algorithmes de déconvolution est d'identifier l'ondelette à phase minimale d'une série aléatoire à partir de sa fonction d'autocorrélation ou de sa dsp. Ces méthodes seront donc vraiment efficaces, pour notre problème de déconvolution aveugle, uniquement si $h(n)$ est réellement à phase minimale. Seulement en pratique, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. En effet, d'une part, les phénomènes physiques observés, de par leur nature, ne sont pas toujours à phase minimale. D'autre part, comme nous le montre

Mitchell (Mitchell et Stokes, 1986), l'échantillonnage ou le ré-échantillonnage d'un signal peut lui faire perdre sa propriété de phase minimale.

Or déconvoluer la sortie d'un filtre à phase non-minimale par son équivalent phase minimale, permet au mieux de blanchir le spectre de $y(n)$ mais pas de retrouver son signal d'entrée $x(n)$ (Figure II-19).

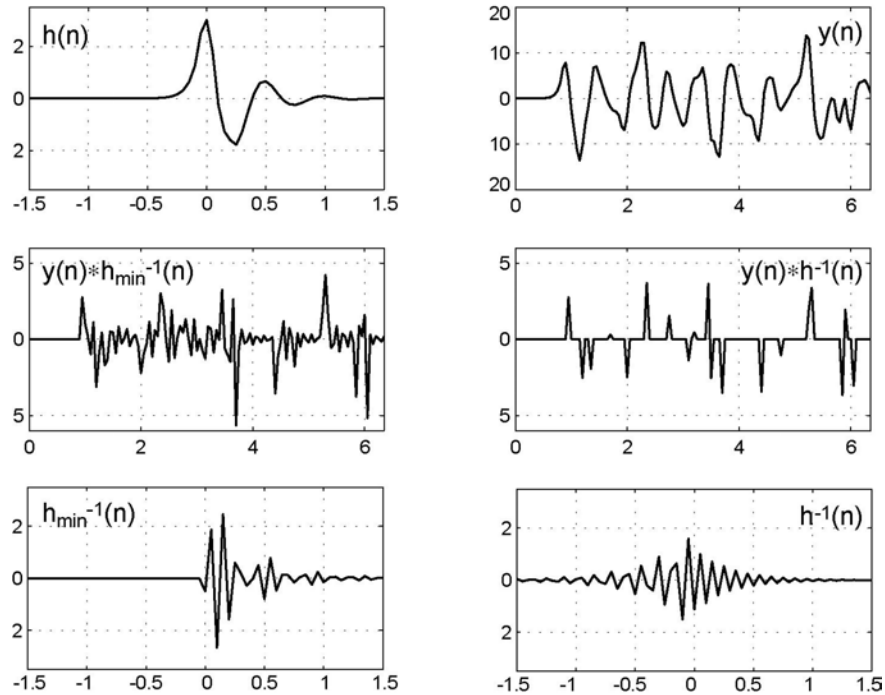


Figure II-19 : Déconvolution prédictive d'un signal à phase non-minimale ; en haut à gauche la réponse impulsionnelle du filtre $h(n)$ à phase non minimale ; en haut à droite le signal observé $y(n)=h(n)*x(n)$; au milieu à gauche l'estimation de $x(n)$ obtenue par déconvolution à phase ; au milieu à droite le vrai signal d'entrée $x(n)$: dans ce cas la déconvolution à phase minimale ne nous permet pas d'estimer correctement le signal d'entrée $x(n)$; en bas à gauche, forme du filtre inverse à phase minimale ; en bas à droite, le vrai filtre inverse $h^{-1}(n)$ de $h(n)$.

En effet, sur cette figure, $y(n)$ est la convolution de $h(n)$ avec $x(n)$ (égal à $y(n) * h^{-1}(n)$). Comme on peut le voir, la convolution de $y(n)$ avec le filtre inverse équivalent à phase minimale $h_{\min}^{-1}(n)$ ne nous permet pas d'éliminer complètement l'effet du filtre $h(n)$ contrairement au filtre inverse $h^{-1}(n)$ qui lui, nous fournit le signal d'entrée $x(n)$. On remarquera par ailleurs, que le filtre inverse à minimum de phase respecte la condition de causalité (iv-II-54) contrairement au vrai filtre inverse $h^{-1}(n)$.

Dans ce cas, on conçoit très bien que la déconvolution à phase minimale est alors inefficace. Il nous faudra donc utiliser d'autres types de déconvolution, comme par exemple la déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur ou la déconvolution aveugle multicanaux. C'est aussi la raison pour laquelle la déconvolution à phase minimale n'est pas considérée comme une méthode de déconvolution aveugle au sens strict. Nous la qualifierons

de semi-aveugle, bien qu'en définitive, elle nous permette tout de même d'identifier le signal d'entrée d'un SLIT ainsi que sa réponse impulsionnelle seulement à partir de son signal de sortie.

Chapitre III Estimation de la fonction source de l'explosion du Kursk par déconvolution à phase minimale

Retrouver la fonction source du mouvement sismique consiste à déconvoluer le mouvement sismique enregistré en surface par la fonction de Green Source-Station. Or cette opération est souvent difficile à réaliser pour la simple raison que la fonction de Green est souvent inconnue. En effet, l'intérieur de la terre est un milieu complexe, hétérogène, dont il est difficile de déterminer la structure fine. Même s'il nous est possible d'en déterminer la structure grossière, la précision, avec laquelle on connaît le milieu, est insuffisante pour pouvoir modéliser correctement sa fonction de Green. D'autres méthodes, autres que la modélisation, existent comme celle des fonctions de Green empiriques. Seulement, les conditions d'applications de cette méthode sont souvent difficiles à réaliser et limitent quelque peu leur potentiel d'utilisation.

Notre objectif est d'estimer la fonction source d'un événement sismique à partir d'un seul enregistrement situé à distance régionale sans connaître la fonction de Green du milieu de propagation du champ d'ondes sismiques. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à une explosion sous-marine. Comme nous allons le voir ce type d'événement sismique possède une signature bien caractéristique assimilable à une ondelette à phase minimale. Nous avons donc utilisé, afin d'identifier l'ondelette source du mouvement sismique, un algorithme de déconvolution à phase minimale. Notre premier travail a alors été d'évaluer le caractère phase minimale du mouvement sismique à la source puis, d'identifier quelle portion du signal sismique semble la plus adaptée à une identification aveugle à phase minimale. Ainsi après avoir identifié l'ondelette source de l'explosion du Kursk, nous l'avons utilisée pour déterminer la profondeur et la puissance de l'explosion.

III.1 Une explosion sous-marine à la loupe

III.1.1 Qu'est ce qu'une explosion ?

Avant de décrire le champ d'ondes de pression créé par une explosion sous-marine, nous allons tout d'abord nous intéresser à ce qui se passe à l'intérieur de l'explosif. Suivant le comportement de l'explosif lors de sa réaction et suivant son confinement, on distingue deux types d'explosion : la déflagration et la détonation.

La déflagration correspond à une explosion durant laquelle le front de réaction¹⁴ se propage à une vitesse inférieure à la vitesse de l'onde de pression à l'intérieur de l'explosif. Lors de ce type d'explosion, la libération de l'énergie produite par l'explosion est plutôt progressive comparée à la détonation. La déflagration engendre par conséquent des effets et des pressions plutôt modérés. Nous la côtoyons d'ailleurs quotidiennement, c'est elle qui fait avancer nos voitures, ou propulse nos avions et fusées.

Par contre dans le cas d'une détonation le front de réaction se propage à l'intérieur de l'explosif à la même vitesse que l'onde de pression. Les gaz produits sont ainsi piégés à l'intérieur de l'explosif. La réaction se déroule alors sous température et pression élevées, jusqu'à ce que tout l'explosif ait réagi. Les gaz à très haute pression et à très haute température sont alors instantanément libérés. Toute l'énergie produite lors de la réaction est donc relâchée très brutalement, décuplant ainsi son pouvoir destructeur. C'est d'ailleurs ce type de réaction qui est recherchée par les militaires lors de la confection d'explosifs tels que le TNT.

III.1.2 Ondes de pression générées par une explosion sous-marine

III.1.2.1 L'onde de choc

Lors d'une explosion détonante, l'arrivée au contact de l'eau du front de réaction génère d'une part la propagation dans l'eau d'une très forte discontinuité de pression, et d'autre part libère les gaz produits lors de la réaction chimique. L'onde associée à cette discontinuité de pression est alors appelée onde de choc. Cette discontinuité de pression est immédiatement suivie par une diminution exponentielle de la pression, due à l'expansion de la bulle de gaz produite par l'explosion. En raison de l'intense niveau de pression atteint, la propagation de cette onde de choc ne suit pas les règles classiques de la propagation d'une onde hydroacoustique (d'amplitude infinitésimale). Le comportement non linéaire de l'onde de choc, au voisinage de l'explosion, se traduit localement par une vitesse de propagation

¹⁴ Le front de réaction est la zone où a lieu la transformation de l'explosif comme par exemple une combustion, une réaction chimique, ou une décomposition.

plusieurs fois supérieure à celle du son dans l'eau (1500m/s), par une décroissance de son amplitude avec la distance supérieure à celle d'une onde acoustique classique, et une modification de sa forme au cours de sa propagation (Cole, 1948), (élargissement caractérisé par une augmentation de la constante de temps θ_0 associée à la décroissance exponentielle de la pression). Bien que cette onde de choc ait un comportement non linéaire, sa forme et son comportement sont identiques d'une explosion à une autre. Ainsi les caractéristiques de pression P_m et de décroissance θ_0 de l'onde de choc (Figure III-1) sont définies par des lois d'échelle, souvent expérimentales, dépendant de la masse d'explosif utilisé et moyennant un coefficient de normalisation, fonction de la nature de l'explosif¹⁵. Ainsi pour une charge sphérique de TNT, la pression maximale P_m de l'onde de choc est de la forme (Cole, 1948) :

$$P_m = 5.23 \times 10^7 \left(\frac{w^{\frac{1}{3}}}{R} \right)^{1.13} \quad (\text{III-1})$$

où P_m est en N.m^{-2} , w est la masse d'explosif équivalent TNT exprimée en Kg et R est la distance à la charge exprimée en mètres. En ce qui concerne la constante de temps θ_0 associée à la décroissance exponentielle de la pression de l'onde de choc,

$$P = P_m e^{-\frac{t}{\theta_0}} \quad (\text{III-2})$$

celle-ci est de la forme (Arons, 1954) :

$$\theta_0 = 9.25 \times 10^{-5} w^{0.26} R^{-0.22} \quad (\text{III-3})$$

où θ_0 est en secondes, w en Kg (équivalent TNT), et R en mètres.

¹⁵ C'est d'ailleurs en raison de cette similitude de la forme de l'onde de choc produite par différents types ou différentes quantités d'explosif, que l'on exprime la puissance d'une explosion par la masse équivalente de TNT nécessaire pour produire une onde de choc de pression identique.

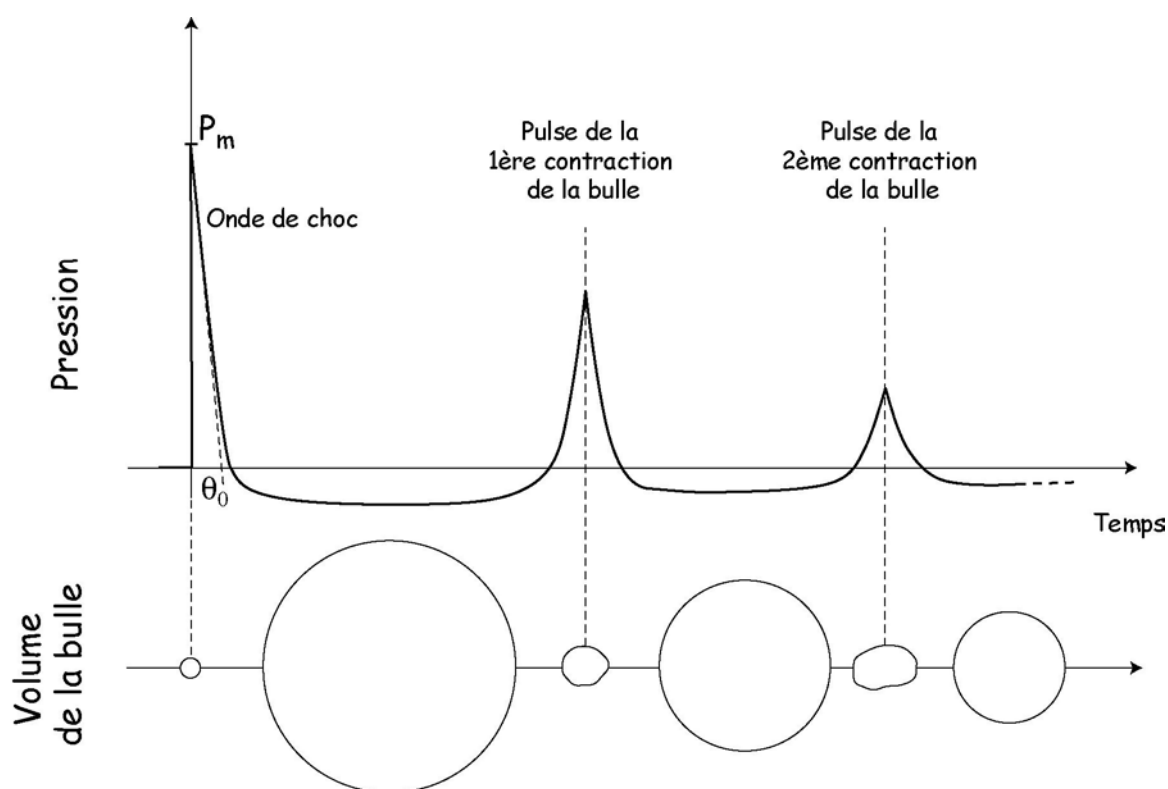


Figure III-1 : Evolution temporelle du champ de pression et du volume de la bulle de gaz issus de l'explosion.

III.1.2.2 L'effet de bulle

Tandis que la bulle de gaz engendrée lors de l'explosion se dilate, sa pression interne diminue. Entraînée par l'inertie associée au déplacement de l'eau à sa périphérie, la bulle continue de grandir bien que sa pression interne devienne inférieure à la pression d'équilibre du milieu dans lequel elle se trouve. Néanmoins, ce déficit de pression finit par arrêter l'expansion de la bulle et initier sa contraction. En se contractant, la pression interne de la bulle augmente. Ainsi cette contraction se poursuivra jusqu'à ce que la pression interne de la bulle permette d'équilibrer les forces d'inertie associées au mouvement de convergence de l'eau à sa périphérie. De plus, comme la contraction de la bulle est d'autant plus rapide que son volume est faible, la pression a une évolution de type exponentielle croissante et atteint des valeurs significatives seulement dans un court intervalle de temps où le volume de gaz est minimum (i.e. contraction maximale). Ayant atteint un nouveau maximum de pression, la bulle est prête pour un nouveau cycle d'expansion contraction. La bulle a donc un mouvement d'oscillation (Figure III-1). Néanmoins, en raison de la perte d'énergie associée aux turbulences ou au mouvement de la bulle, la première oscillation de bulle est de loin la plus significative.

III.1.2.3 Période d'oscillation de la bulle : la Formule de Willis

Tout comme les caractéristiques de l'onde de choc, la période d'oscillation de la bulle peut être exprimée simplement par des lois d'échelle faisant intervenir la masse de l'explosion, sa profondeur et la nature de l'explosif utilisé. Ainsi en considérant que la bulle ne perd qu'une très faible quantité d'énergie au cours de son oscillation, excepté à proximité de sa contraction maximale, sa période d'oscillation peut être estimée par la formule de Willis :

$$T = K \frac{w^{\frac{1}{3}}}{(z + 10)^{\frac{5}{6}}} \quad (\text{III-4})$$

avec T en secondes, la profondeur z de l'explosion en mètres, et w en Kg (équivalent TNT). K est un paramètre de normalisation dépendant du type d'explosif utilisé. Classiquement pour le TNT, on a $K=2.1$. La formule de Willis prend donc la forme suivante :

$$T = 2.1 \frac{w^{\frac{1}{3}}}{(z + 10)^{\frac{5}{6}}} \quad (\text{III-5})$$

III.2 La fonction source sismique associée à une explosion sous-marine

III.2.1 Le champ d'ondes sismiques généré par une explosion sous-marine

La théorie classique de propagation des ondes sismologiques est basée sur des équations linéaires. Elles seront donc capables de modéliser correctement l'évolution spatiale et temporelle du champ d'ondes sismiques engendré par notre explosion sous-marine seulement à partir du moment où celui-ci acquiert un comportement linéaire.

Une solution couramment utilisée en sismologie consiste à définir comme source du mouvement sismique une zone, dite zone de couplage linéaire, plus vaste comprenant la bulle ainsi que la zone où le champ d'ondes a un comportement non linéaire¹⁶. En utilisant le théorème de représentation, le mouvement sismique est alors complètement défini, et peut être entièrement calculé à partir de la connaissance du mouvement sismique sur la limite de la zone de couplage linéaire. Seulement définir le mouvement sismique aux frontières de la

¹⁶ Lors d'un tremblement de terre le mouvement sismique proche de la faille a aussi un comportement non-linéaire.

zone de couplage linéaire, nécessite de pouvoir modéliser l'évolution de l'onde de choc, et donc le comportement non-linéaire des milieux traversés à l'intérieur de la zone...

Wielandt, (1975) apporte une solution à ce problème en démontrant que :

- Le mouvement sismique en champ lointain est proportionnel à la dérivée $\dot{V}(t)$ du volume $V(t)$ de la zone de couplage linéaire :

$$u(r,t) = \frac{1}{4\pi\alpha r} \dot{V}\left(t - \frac{r-x}{\alpha}\right) \quad (\text{III-6})$$

pour un milieu homogène, avec $u(r,t)$ le déplacement sismique en champ lointain, α la vitesse des ondes sismiques, x le rayon de la source et r la distance épacentrale.

- D'un point de vue sismologique, il suffit de connaître le comportement basse fréquence de $V(t)$, inférieur à 50 Hz.
- La contribution de l'onde de choc au signal sismique est négligeable.
- Dans ces conditions, il est alors possible de substituer le volume $V(t)$ de la zone de couplage linéaire par celui de la bulle.

L'expression précédente (III-6) est de toute première importance car elle nous permet de négliger tout le comportement non linéaire à l'intérieur de la zone de couplage linéaire. Ainsi le mouvement sismique en champ lointain s'exprime simplement en fonction de la vitesse de variation du volume de la bulle. Il nous reste donc plus qu'à en trouver une expression.

III.2.2 Ondelette source générée par l'oscillation de la bulle

Nous avons à notre disposition uniquement des enregistrements vélocimétriques $\dot{u}(r,t)$. Ainsi pour éviter l'opération d'intégration qui a tendance à amplifier le bruit sismique basse fréquence, nous allons travailler sur le champ d'ondes en vitesse plutôt que sur celui en déplacement. En dérivant l'équation précédente (III-6), on obtient :

$$\dot{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi\alpha r} \ddot{V}\left(t - \frac{r-x}{\alpha}\right) \quad (\text{III-7})$$

pour un milieu homogène en champ lointain.

L'ondelette source de la vitesse du sol est donc proportionnelle à la dérivée seconde du volume de la bulle.

Cependant estimer avec précision le volume de la bulle $V(t)$ nécessite une modélisation numérique du comportement dynamique de la bulle ce qui sort du domaine de cette étude.

Néanmoins nous allons essayer d'en donner une forme approchée à partir de considérations qualitatives et quantitatives. Comme on peut le voir sur la Figure III-2, le mouvement d'oscillation de la bulle sur une période est très similaire à une parabole retournée.

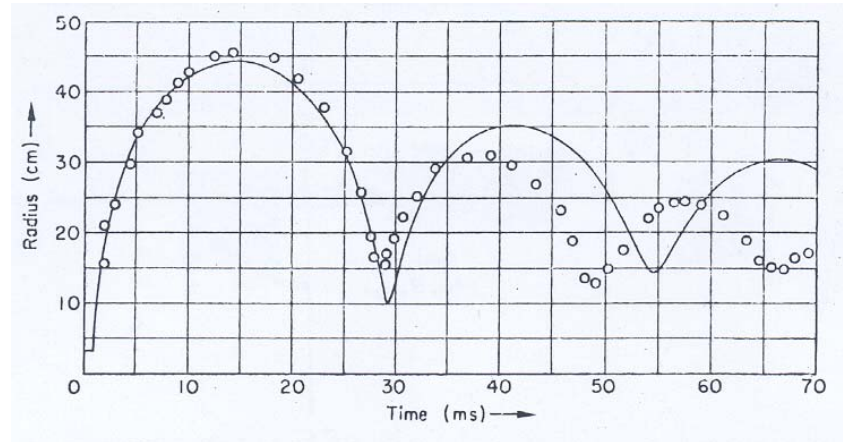


Figure III-2 : D'après (Wielandt, 1975), rayon de la bulle calculé par éléments finis pour une charge de 250g à une profondeur de 90m, trait plein ; valeurs expérimentales données par (Cole, 1948) cercle.

Si en première approximation, on considère que le mouvement de la bulle sur une période est le même que celui d'une parabole renversée, excepté lorsque la bulle est proche de sa contraction maximale, la vitesse d'oscillation de la bulle a une forme en « dent de scie » (Figure III-3 b). En effet, d'une part la dérivée d'une parabole est une fonction affine, d'où la décroissance linéaire de la vitesse d'oscillation de la bulle. D'autre part, la vitesse d'oscillation de la bulle est nulle lorsque la contraction est maximale ou minimale.

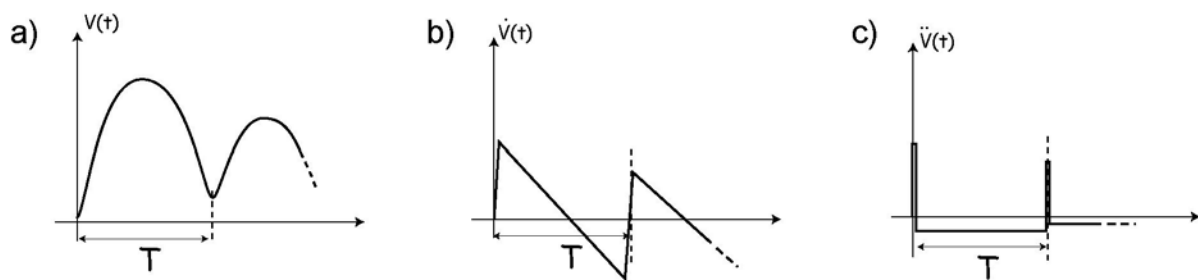


Figure III-3 : Modèle simplifié du comportement du volume de la bulle

En ce qui concerne la dérivée seconde du volume de la bulle, celle-ci va donc être constante et négative sur la majeure partie d'une période d'oscillation. Elle présente néanmoins deux pulses de pression en début et fin de période, afin de générer les discontinuités de vitesse des phases de contraction maximale de la bulle (Figure III-3-c). Ainsi, en première approximation, l'ondelette source de la vitesse du sol en champ lointain peut être modélisée par des diracs séparés par des zones de dépression.

III.2.3 Caractère phase minimale de l'ondelette source

Nous allons dans ce paragraphe tenter d'étudier les propriétés de la phase de l'ondelette source. Notre objectif est bien évidemment de savoir si l'ondelette source associée à une explosion sous-marine est à phase minimale, et donc par conséquent de savoir si un algorithme de type déconvolution prédictive est capable de nous en donner une bonne image.

III.2.3.1 Etude de la phase du terme d'oscillation de la bulle

Des études ont déjà été réalisées dans ce sens. Notamment, on peut citer le travail de (Barrodale et al., 1984) qui ont d'ailleurs montré que l'ondelette de pression générée par une explosion sous-marine n'est pas à phase minimale. L'ondelette source du champ d'onde sismique $\ddot{V}(t)$ ne donc serait pas à phase minimale. On vient donc d'identifier, dans ce qui précède, champ de pression et ondelette source $\ddot{V}(t)$. En effet, comme nous le montre (Keller et Kolodner, 1956), la dérivée seconde du volume de la bulle et le champ de pression à l'intérieur du fluide sont directement proportionnels pour peu que l'on soit suffisamment loin de la bulle (terme en $1/r^4$ négligeable) :

$$p(r, t) = p_0 + \rho \left[\frac{1}{4\pi r} \ddot{V} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{32\pi^2 r^4} \dot{V}^2 \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (\text{III-8})$$

où c est la célérité des ondes acoustiques dans l'eau, ρ la masse volumique de l'eau, r la distance à la bulle, et p_0 la pression hydrostatique à la profondeur de l'explosion.

Cependant, les enregistrements qu'utilisent (Barrodale et al., 1984), comportent très vraisemblablement l'onde de choc, qui comme nous l'avons vu, n'intervient pas dans le mouvement sismique. D'autre part, si on reprend notre modèle simplifié pour $\ddot{V}(t)$ en négligeant la dépression (il se résume donc à deux diracs), celui-ci est à phase minimale si et seulement si le deuxième pulse est d'amplitude inférieur au premier. En effet, la transformée en z d'un signal composé de deux diracs d'amplitude 1 et B est de la forme :

$$P(z) = 1 + Bz^{-k} \quad (\text{III-9})$$

où la période d'oscillation de la bulle T est telle que $T = kT_e$, T_e étant la fréquence d'échantillonnage. Les zéros de $P(z)$ sont donc les racines $k^{\text{ième}}$ de B . Lorsque B est inférieur à 1, les zéros de $P(z)$ sont donc tous à l'intérieur du cercle unité. Dans ce cas, $P(z)$ est alors à phase minimale, comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2.

Cependant, même si le modèle simplifié de la Figure III-3 nous permet de bien appréhender la forme globale de l'évolution temporelle de $\ddot{V}(t)$, il ne nous permet pas d'en modéliser les

caractéristiques temporelles basses fréquences. Or comme on l'a vu dans le Chapitre 2, le caractère phase minimale d'un signal est très sensible à la qualité avec laquelle on est capable d'estimer son contenu basse fréquence. Nous allons donc essayer d'améliorer la modélisation du contenu basse fréquence de notre ondelette à partir des caractéristiques temporelles (temps caractéristiques, passage à zéros) relatives à la physique de l'ondelette de pression générée dans le fluide.

Un modèle, inspiré de la forme des enregistrements acoustiques des explosions sous-marines, consiste à représenter le premier pulse de pression par une exponentielle décroissante de constante de temps τ_0 et le deuxième pulse par deux exponentielles, l'une croissante, l'autre décroissante, de constante de τ_l (Figure III-4).

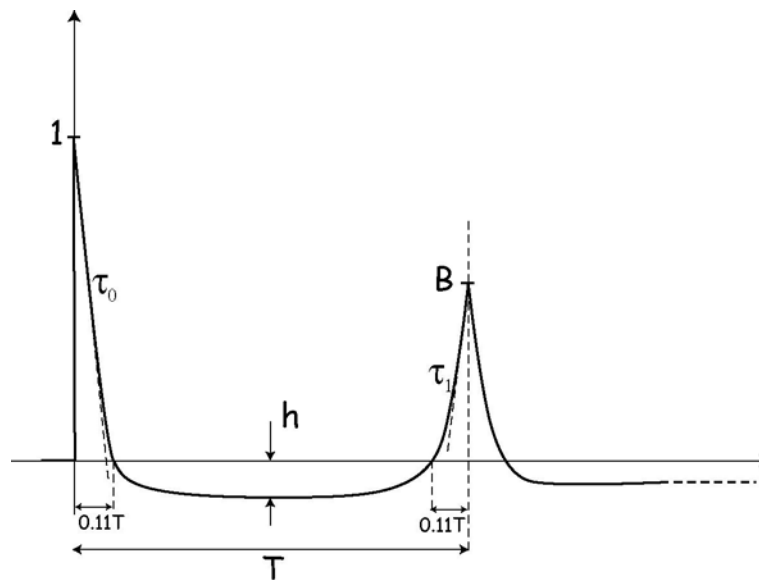


Figure III-4 : Modèle de l'ondelette source associé au mouvement de la bulle décrit par la relation (III-10). Afin d'augmenter la précision du modèle, chaque pulse de pression est souvent modélisé par deux exponentielles décroissantes (Barrodale et al., 1984) : une exponentielle de constante de temps faible, chargée de modéliser l'onde de choc, et une exponentielle de constante plus élevée, chargée de modéliser le contenu basse fréquence de l'onde de pression. Cependant comme la contribution de l'onde de choc au mouvement sismique est négligeable (Wielandt, 1975), nous avons choisi de n'utiliser qu'une seule exponentielle décroissante pour modéliser les pulses de pression de notre ondelette source. En ne considérant qu'une seule oscillation de bulle, l'ondelette source du mouvement sismique est proportionnelle à :

$$\ddot{V}(t) \propto \begin{cases} (1+h)e^{-\frac{t}{\tau_0}} - (B+h)e^{-\frac{|t-T|}{\tau_1}} - h & t \in [0, T] \\ Be^{-\frac{|t-T|}{\tau_1}} & t \in [T, +\infty[\end{cases} \quad (\text{III-10})$$

Ainsi notre modèle d'ondelette source est complètement déterminé par 5 paramètres : B le rapport d'amplitude des pulses de pression, h le niveau de dépression, T la période d'oscillation de la bulle, et τ_0 , τ_1 les constantes de temps des exponentielles du premier et du second pulse de pression respectivement.

D'autre part, on peut montrer¹⁷ que la valeur de la dépression h s'exprime simplement à partir de B , T , τ_0 , τ_1 :

$$h = \frac{(\tau_0 + B\tau_1)}{(T - \tau_0 - \tau_1)} \quad (\text{III-11})$$

De plus, d'après (Cole, 1948), l'annulation de la pression¹⁸ a lieu à des instants correspondant à une fraction constante de la période T d'oscillation de bulle de l'ordre de 11% (Figure III-4). Ainsi, en imposant à notre modèle de vérifier ces caractéristiques temporelles d'annulation de la pression, on peut alors déterminer les valeurs des constantes de temps τ_0 et τ_1 seulement à partir de la connaissance de B et T .

Finalement, seulement deux paramètres nous permettent de complètement définir notre modèle de fonction source : B le rapport d'amplitude entre les deux pulses de pression et T la période d'oscillation de la bulle.

Nous avons alors testé le caractère phase minimale de cette ondelette source en fonction de B et T . Ainsi, pour chaque couple B et T , nous avons estimé la forme de l'ondelette source associée, puis calculé son équivalent phase minimale.

Comme on peut le voir sur la Figure III-5, l'erreur maximale normalisée entre l'ondelette source d'une explosion sous-marine et son équivalent à phase minimale ne dépasse pas 20% pour $B < 0.6$ au niveau du premier pic (Figure III-5-a), ou pour $B < 0.4$ au niveau du second pic (première contraction de la bulle) (Figure III-5-b).

Finalement, l'erreur moyenne sur l'ensemble de l'ondelette source, faite en ne considérant que son équivalent à phase minimale, est inférieure à 10%, si l'amplitude de la première

¹⁷ Il suffit de considérer que l'intégrale de la pression sur une période est nulle, puisque celle-ci est proportionnelle à $\ddot{V}(t)$ et que la vitesse d'oscillation de la bulle est nulle lorsqu'elle atteint sa contraction maximale.

¹⁸ En toute rigueur, il s'agit de l'annulation de l'excès de pression par rapport à la pression hydrostatique.

contraction de l'ondelette source de l'explosion est inférieure à $B=0.6$ (Figure III-5 c). Ainsi même si la position de la première contraction de bulle n'est pas altérée par passage à phase minimale, il n'en est pas de même de son amplitude, qui, comme on peut le voir sur la Figure III-5-d, est inférieure d'environ 15% par rapport à la vraie valeur d'amplitude du deuxième pulse pour $B=0.6$.

Ainsi, puisque que d'une façon générale l'erreur entre l'ondelette source d'une explosion sous-marine et son équivalent à phase minimale est inférieure à 20% pour $B < 0.6$, nous avons donc considéré en première approximation que l'accélération du volume de la bulle, et donc l'ondelette source du signal sismique en vitesse, est à phase minimale. Il faudra veiller tout de même à ce que le rapport B , entre les amplitudes des deux premiers pics de pression, soit inférieur à 0.45.

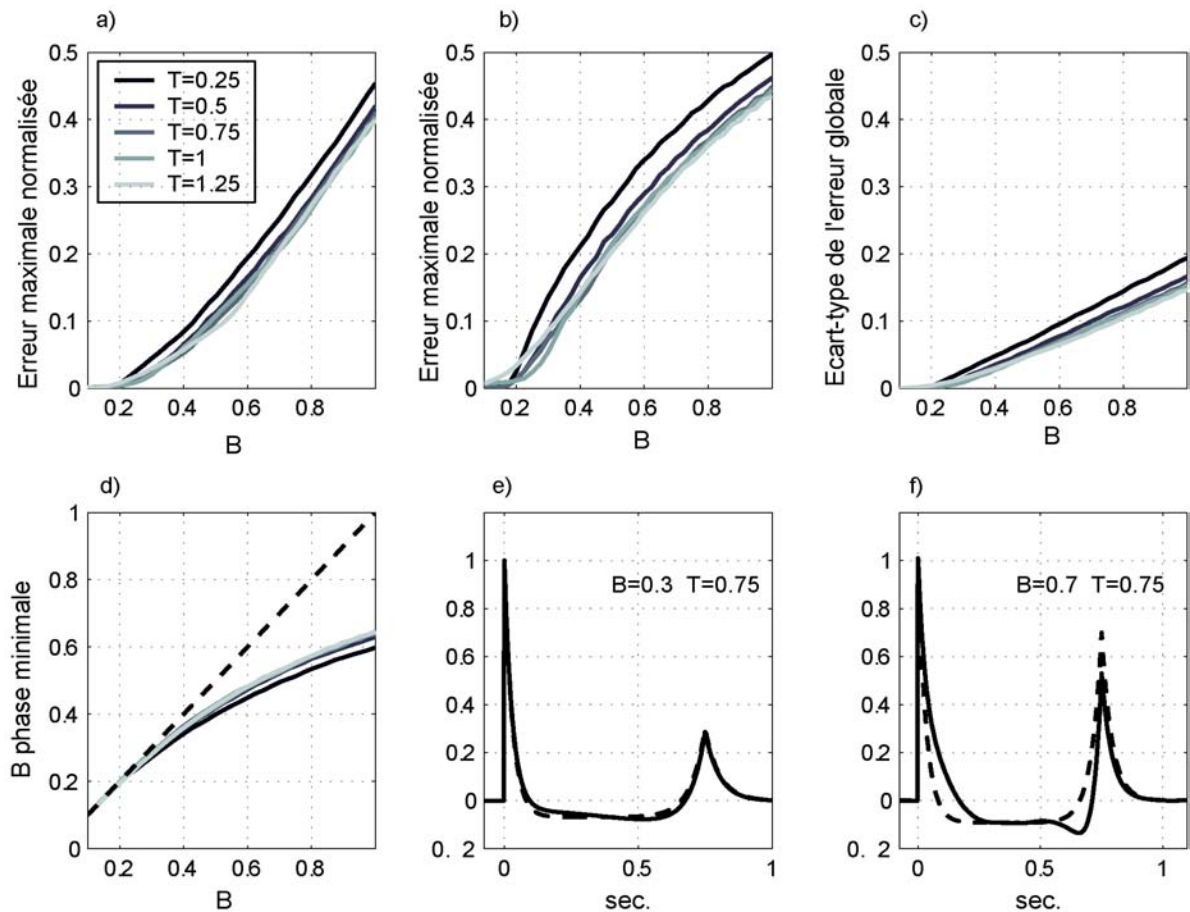


Figure III-5 : Etude du caractère phase minimale de l'ondelette source du mouvement sismique : a) amplitude maximale de l'erreur entre l'ondelette source d'une explosion sous-marine et son équivalent à phase minimale au niveau du premier pulse de pression; b) amplitude maximale de l'erreur entre l'ondelette source d'une explosion sous-marine et son équivalent à phase minimale au niveau du deuxième pulse de pression; c) Ecart-type de l'erreur moyenne sur les deux premiers pulses de l'ondelette source d'une explosion sous-marine et son équivalent phase minimale. d) Amplitude du second pulse de l'équivalent à phase minimale d'une explosion sous-marine en fonction de l'amplitude initiale de l'effet de bulle B . e) et f) exemple d'équivalent à phase minimale pour différentes valeurs d'amplitude B et de période T de l'effet de bulle.

III.2.3.2 Effet du terme de réverbération de l'onde de pression à l'intérieur de la mer

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés uniquement au mouvement sismique généré par l'explosion elle-même. Or comme nous le montre par exemple l'amplitude spectrale des signaux du Kursk (Figure III-6), le mouvement sismique intègre non seulement les caractéristiques de l'explosion mais aussi les perturbations engendrées par la structure locale autour de la source, comme notamment l'effet des réverbérations multiples à l'intérieur de la mer. Notre source sismique correspond donc à la convolution de l'ondelette source due à l'explosion avec l'effet des réflexions multiples à l'intérieur de la mer. Ainsi, cette ondelette ne sera à phase minimale que si l'ondelette due à l'explosion et la réponse impulsionnelle associée aux multiples réverbérations sont simultanément toutes les deux à phase minimale.

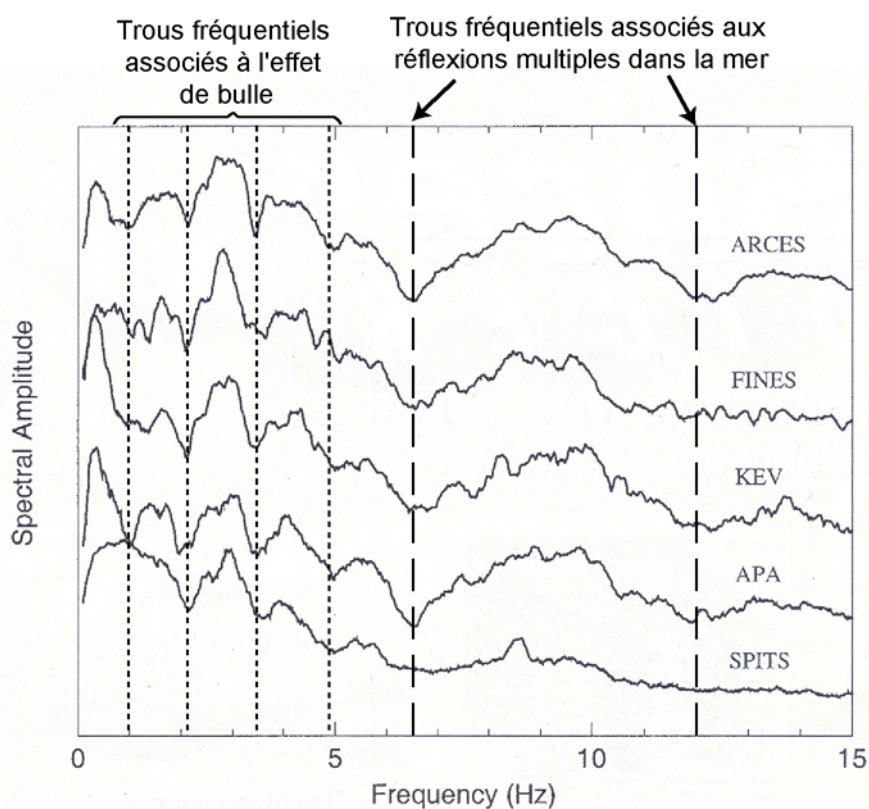


Figure III-6 : Amplitude spectrale moyennée sur différents réseaux régionaux montrant clairement les « trous » fréquentiels créés par la réverbération du champ d'onde de pression à l'intérieur de la mer, d'après (Koper et al., 2001).

Nous allons maintenant vérifier que la fonction de transfert associée à la réverbération est à phase minimale.

Pour ce faire, nous allons utiliser le formalisme des « lumped systems » ou quadripôles en français, associés aussi à la notion de matrice d'impédance. Ayant pour origine les méthodes de résolution du comportement des réseaux ou systèmes électriques complexes, il fut adapté

dans les années soixante pour la prospection sismique pétrolière, au calcul de la réponse sismique d'un ensemble de couches horizontales planes. L'utilisation de cette méthode fut initiée par Goupillaud, (1961); Kunetz et D'Erceville, (1962) qui calculèrent la réponse en réflexion d'un milieu stratifié à une onde en incidence verticale. Par la suite, Sherwood et Trorey, (1965) et Treitel et Robinson (1966), en introduisant la notion de transformée en z , étudièrent les propriétés de phase de la réponse en transmission ou en réflexion d'un système de couches planes d'une onde en incidences verticales. Outre le fait que ce formalise a permis à Sherwood et Trorey (1965) de montrer le caractère phase minimale de la réponse en incidence verticale d'un milieu tabulaire, Frasier (1970) l'utilisa avec succès afin de calculer des sismogrammes synthétiques dans le cas d'ondes planes P-SV en incidence non verticale. (Ferber, 1988) fit de même mais en prenant en compte l'absorption.

Dans le cas d'une explosion sous marine, la source sismique est située à l'intérieur de la mer, donc à l'intérieur du système. Ainsi, même si la tranche d'eau peut être considérée comme un milieu tabulaire, on ne peut pas dire a priori que sa réponse est à phase minimale puisque le système n'est pas excité en transmission. Nous allons donc étudier, en utilisant le formalise des quadripôles, le caractère à phase minimale de la réponse de la tranche d'eau.

Considérons une tranche d'eau de hauteur h , dans laquelle l'explosion a lieu à une profondeur h_e . On appelle respectivement R et S les coefficients de réflexion des ondes acoustiques au fond et à la surface de la mer. Par ailleurs, on appelle respectivement U_s , U_f et U_e les ondes ascendantes en incidence verticale sur la surface et le fond de la mer, et sur une interface horizontale fictive située à la profondeur de l'explosion. On appelle de même V_s , V_f et V_e , les ondes descendantes en incidence verticale sur ces mêmes interfaces. Enfin, k_1 et k_2 sont deux entiers¹⁹ tels que :

$$\begin{aligned} k_1 &= 2h_e F_e \\ k_2 &= 2(h - h_e) F_e \end{aligned} \tag{III-12}$$

où F_e représente la fonction d'échantillonnage des signaux.

¹⁹ F_e , la fréquence d'échantillonnage est choisie en conséquence.

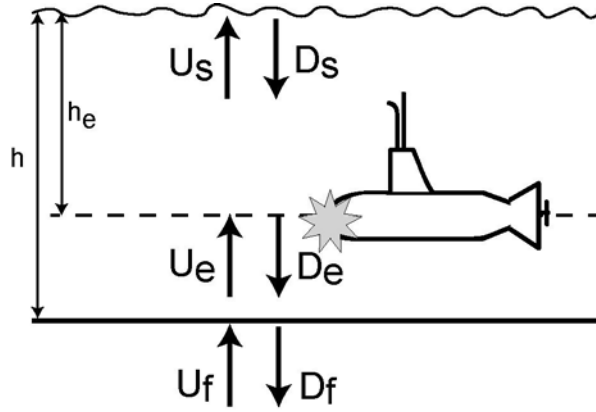


Figure III-7 : Convention utilisée pour la modélisation du champ d'onde de pression par système « lumped »

On décompose notre système constitué par la tranche d'eau en deux sous systèmes. Le premier système correspond à la tranche d'eau située au dessus de l'explosion. La matrice de transfert en z entre les champs $[U_e, D_e]^T$ et $[U_s, D_s]^T$ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} U_e \\ D_e \end{bmatrix} = z^{\frac{k_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ D_s \end{bmatrix} \quad (\text{III-13})$$

où $k_1/2$ correspond au temps de propagation, en nombre d'échantillon, que met l'onde pour atteindre la surface de l'eau.

Le second système, quant à lui, correspond à la tranche d'eau située en dessous de l'explosion. Sa matrice de transfert en z , entre les champs $[U_f, D_f]^T$ et $[U_e, D_e]^T$, est de la forme :

$$\begin{bmatrix} U_e \\ D_e \end{bmatrix} = \frac{z^{\frac{k_2}{2}}}{1-R} \begin{bmatrix} 1 & -Rz^{-k_2} \\ -R & z^{-k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ D_s \end{bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

Après quelques manipulations matricielles, et en appelant $E(z)$ la transformée en z du champ de pression créé par l'explosion, la transformée en z , $D_f(z)$, du champ d'ondes de pression émis vers l'intérieur de la terre s'exprime de la façon suivante :

$$D_f(z) = (1+R)z^{-\frac{k_2}{2}} \frac{(1-Sz^{-k_1})}{(1+RSz^{-(k_1+k_2)})} E(z) \quad (\text{III-15})$$

La fonction de transfert en z associée aux multi-réflexions à l'intérieur de la mer prend la forme d'une fraction rationnelle. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, celle-ci sera à phase minimale, si ses pôles et ses zéros sont à l'intérieur du cercle unité, donc si $S < 1$ et $SR < 1$. En pratique, ces conditions seront vérifiées puisque l'on a très rarement des interfaces

complètement réfléchissantes. Ainsi, la réponse impulsionnelle de la réverbération de l'onde de pression à l'intérieur de la mer est à phase minimale. La Figure III-8 représente d'ailleurs les réponses impulsionnelles d'une couche d'eau de 120m d'épaisseur pour une profondeur de source de 120 ou 60m.

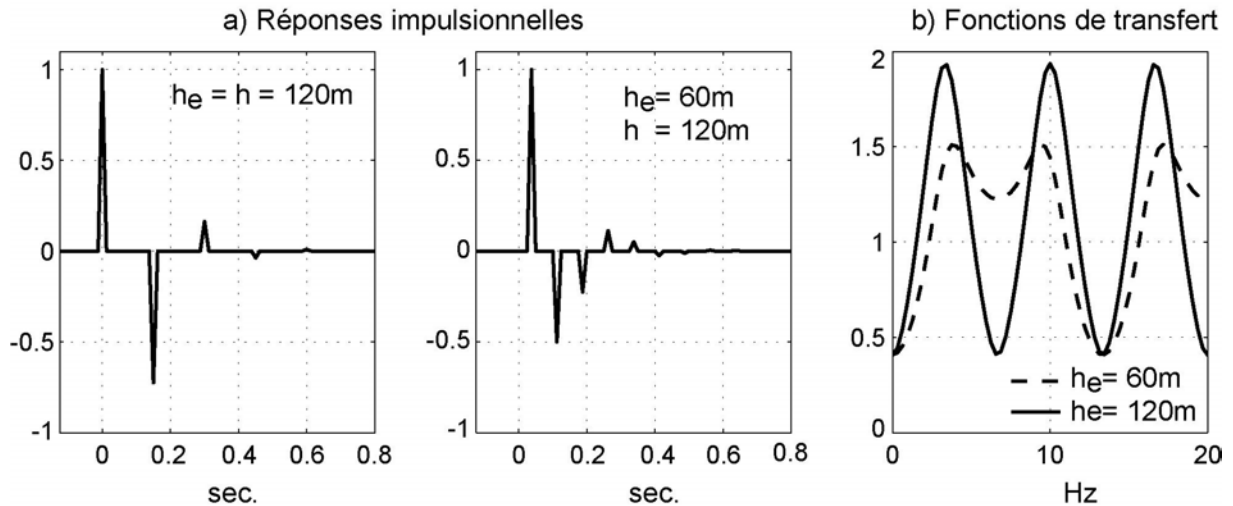


Figure III-8 : Réponses impulsionnelles et fonctions de transfert de la mer, pour une onde de pression en propagation verticale avec $R=0.45$, $S=0.5$, et $E=1/(1+R)$.

Nous venons donc de montrer que l'ondelette de pression générée par une explosion sous-marine ainsi que la réponse impulsionnelle associée aux réverbérations à l'intérieur de la mer sont toutes deux à phase minimale. La fonction source du mouvement sismique en champ lointain est donc à phase minimale. Elle pourra donc être correctement estimée par une opération de déconvolution à phase minimale.

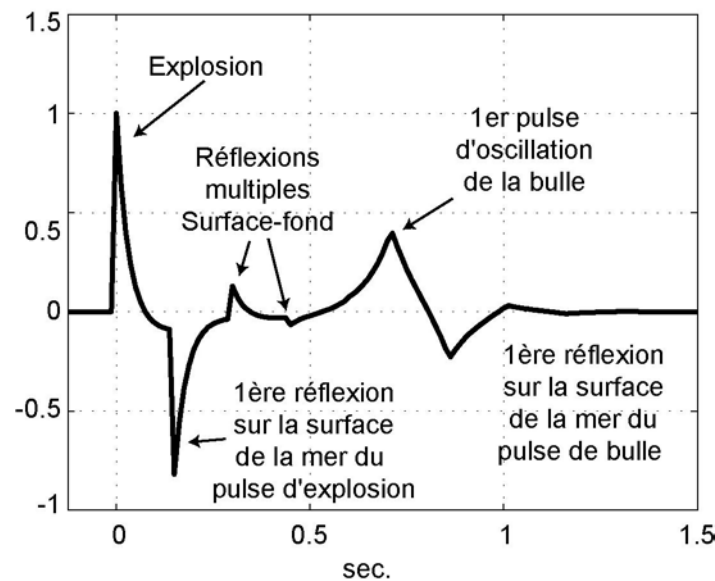


Figure III-9 : Ondelette source « synthétique » calculée pour $B=0.4$, $T=0.7$, et une explosion située au fond de la mer à une profondeur de 120m.

III.3 Contexte général de l'étude

III.3.1 Caractéristiques et situation géographique

Le 12 août 2000 deux explosions, séparées de 135s, ébranlèrent la Mer de Barents. Nous allons nous intéresser à la deuxième explosion qui a eu lieu à 7h30:42 et qui causa très vraisemblablement la perte du Kursk, un des plus modernes sous-marins russes. En effet, 250 fois plus importante que la première et d'une magnitude d'onde de volume m_b estimée à environ 3.5, elle a été enregistrée jusqu'à 5000km de distance. Située dans une région sismiquement inactive de la mer de Barents, cette deuxième explosion a été relocalisée par Koper et al. (2001) à 69.628 degré de latitude nord et 37.160 de longitude Est (Figure III-10). La première explosion quant à elle, a été relocalisée par 69.604° de latitude Nord et 36.957° de longitude Est.

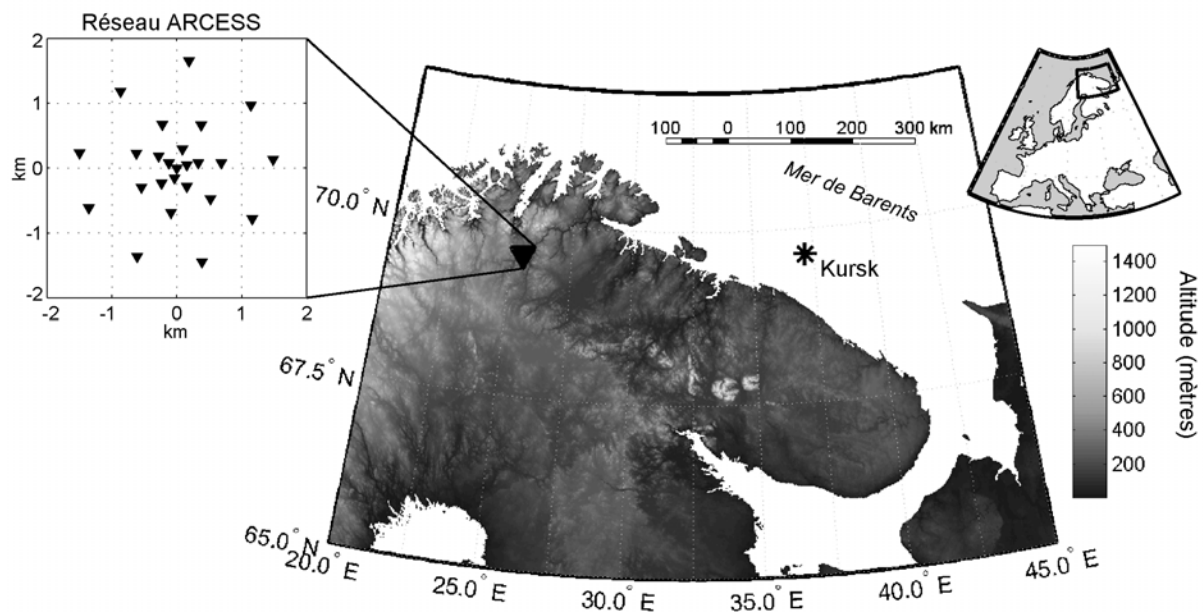


Figure III-10 : Localisation de l'étude et géométrie du réseau ARCESS.

L'étude du spectre des signaux de la deuxième explosion enregistrés en différents sites (Figure III-6), leur a permis d'une part, d'estimer la profondeur de l'explosion à 85-100m, grâce à la position des trous fréquentiels engendrés par les réflexions multiples à l'intérieur de la mer, (Figure III-6), mais aussi sa puissance, de l'ordre de 3100-4500Kg équivalent TNT, grâce à l'estimation de la période d'oscillation de la bulle (III-5). En ce qui concerne la profondeur, celle-ci est cohérente avec la profondeur de la mer de Barents, comprise entre 100 et 150m dans cette région. D'autre part, basé sur la comparaison des formes observées avec des formes d'ondes synthétiques, calculées grâce à un algorithme de tracé de rais généralisés, Savage et Helmberger (2001) ont estimé la charge de l'explosion du Kursk à environ 4000Kg

équivalent TNT. Enfin, l'application au Kursk de lois d'échelle charge-magnitude obtenues pour des explosions sous-marine en Mer morte donne une charge comprise entre 3000Kg et 7000Kg, permettant ainsi à Koper et al. (2001) de confirmer leur première estimation.

III.3.2 Les signaux utilisés

Nous avons utilisé les signaux de la deuxième explosion enregistrés sur le réseau ARCESS, lequel est actuellement sous la responsabilité du NORSAR. Ce réseau, situé à une distance épacentrale de notre événement de 451 km, est localisé au nord de la Norvège par 69.5349 degré de latitude nord et 25.5058 degré de longitude Est (Figure III-10). Il a une ouverture maximale de l'ordre de 3 km. Il se compose de 25 stations sismologiques de type GS-13, une composante verticale courte période ($f_0=1\text{Hz}$), implantées sur une formation rocheuse de forte impédance de type gabbro, nous permettant de négliger la présence éventuelle d'effets de site à nos fréquences d'observation.

Le mouvement du sol est échantillonné à une cadence de 40Hz. Nous avons tout d'abord corrigé chaque enregistrement de la réponse en vitesse du sismomètre. Puis nous les avons filtrés par un filtre de butterworth passe haut d'ordre 5 et de fréquence de coupure de 0.9 Hz afin de supprimer le bruit microsismique très énergétique pour des fréquences inférieures à 1 Hz.

On obtient ainsi un jeu de 25 signaux sur lequel nous allons tenter d'extraire la source par déconvolution à phase minimale. Nous n'allons pas effectuer un traitement d'antenne, mais nous allons tout de même utiliser simultanément plusieurs signaux afin d'éprouver la stabilité des différentes étapes de notre algorithme au travers d'un traitement statistique.

III.3.3 Pourquoi travaille-t-on à distance régionale ?

On se place à distance régionale pour deux raisons. La première est que l'explosion du Kursk a une magnitude M_s de l'ordre de 3.5, et n'a donc pu être enregistrée à des distances épacentrales supérieures à 5000km. La seconde est liée aux caractéristiques intrinsèques du signal que l'on cherche à estimer. Classiquement, en sismologie lorsque l'on travaille sur la source sismique, on s'intéresse essentiellement à son contenu basse fréquence car celui-ci nous donne accès à une mesure de la « taille » de l'événement : le moment sismique. Cependant comme nous l'avons déjà dit notre objectif est de retrouver les caractéristiques temporelles fines de l'ondelette source du mouvement sismique. Nous ne pouvons donc pas nous limiter au simple contenu basse fréquence du sismogramme, mais devons au contraire utiliser aussi son contenu haute fréquence puisque celui-ci comporte justement l'information

sur les caractéristiques temporelles fines de la source sismique. Cependant, au cours sa propagation à l'intérieur de la terre, le contenu haute fréquence²⁰ du champ d'ondes sismiques s'atténue en fonction de la distance plus rapidement que son contenu basse fréquence. Ainsi suivant le niveau de l'atténuation des ondes, il faudra se placer suffisamment près de l'événement que l'on veut étudier de façon à ce que son contenu haute fréquence ne soit pas perdu dans le bruit et continuer à travailler sur un signal large bande.

III.4 Ondelette à phase minimale des différentes phases sismiques des sismogrammes du Kursk

L'objectif de ce paragraphe est de savoir dans quelle mesure la fonction de Green source/récepteur est assimilable à un bruit blanc stationnaire. En effet, comme on l'a vu précédemment (Chapitre II), il s'agit d'une hypothèse que doivent nécessairement vérifier nos signaux, si l'on désire que l'utilisation d'un algorithme de déconvolution à phase minimale nous permette d'obtenir la fonction source associée à l'explosion du Kursk.

III.4.1 Non stationnarité d'un sismogramme

Comme on peut le voir sur la Figure III-11, le mouvement sismique est un signal plutôt complexe qui dure plusieurs minutes alors que la source associée à une explosion sous-marine ne dure que quelques secondes voire quelques dixièmes de seconde. La forme générale d'un sismogramme à distance régionale est en quelque sorte une image de la fonction de Green qui dans ce cas reflète la propagation des ondes sismiques à l'intérieur de la croûte terrestre. D'ailleurs les différentes arrivées énergétiques de l'enregistrement sismique correspondent à différents modes de propagation (réfléchi, réfracté) des diverses ondes (P, S) se propageant à l'intérieur de la terre.

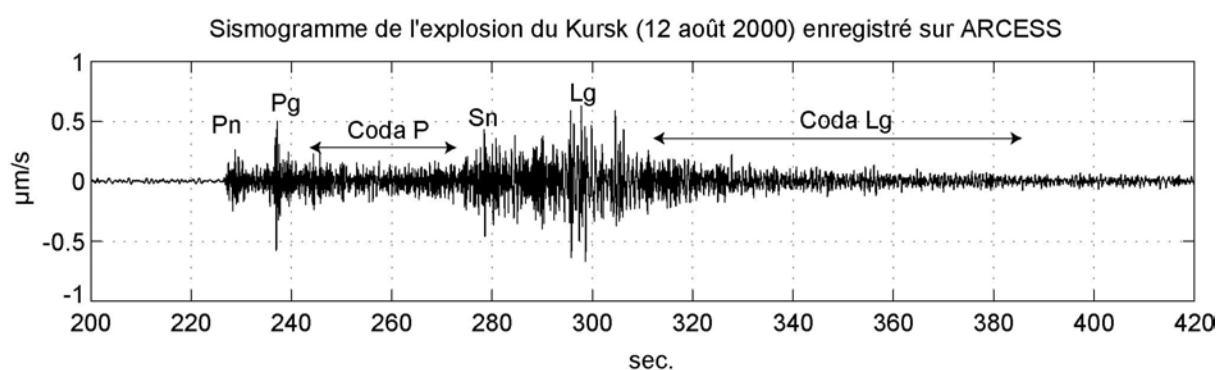
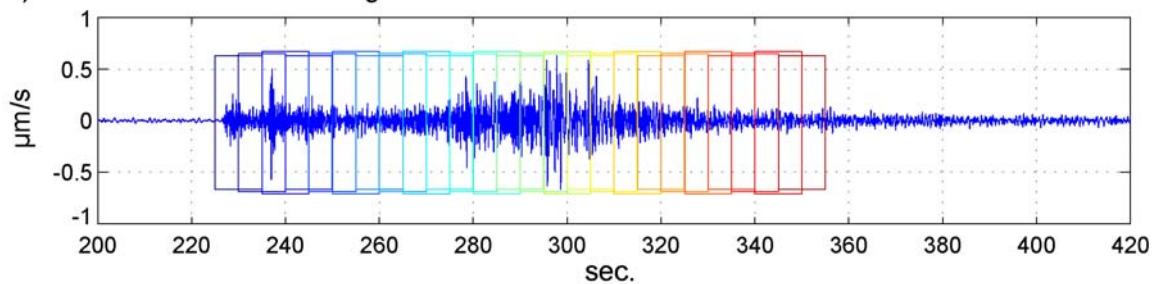


Figure III-11 : Structure d'un sismogramme enregistré à distance régionale : enregistrement de l'explosion du Kursk à ARCESS filtré passe-haut, $f_c=0.9\text{Hz}$.

²⁰ Pour un tremblement de terre il s'agit de son contenu fréquentiel situé au delà de sa fréquence coin.

Ainsi d'un point de vue purement temporel, l'hypothèse de stationnarité semble bien compromise. Afin d'éliminer ce problème on pourrait utiliser un correcteur automatique de gain d'usage courant en sismique pétrolière. Cependant pour que cette stationnarisation temporelle du signal soit efficace, encore faut-il que notre signal soit aussi stationnaire d'un point de vue fréquentiel. Or, comme on peut le voir sur la Figure III-12, l'évolution temporelle des caractéristiques basses fréquences du sismogramme sont complètement différentes de celles de son contenu haute fréquence. En effet, alors que ce dernier montre une décroissance uniforme au cours du temps de l'amplitude du spectre avec une très bonne conservation de sa forme générale, il n'en est pas de même pour la partie basse fréquence (aux alentours de 1Hz) qui présente une évolution temporelle beaucoup plus aléatoire. Ainsi l'hypothèse selon laquelle l'ensemble de notre signal sismique pourrait être considéré comme un signal aléatoire stationnaire est bien compromise.

a) Position des fenêtres de signal



b) Amplitude spectrale

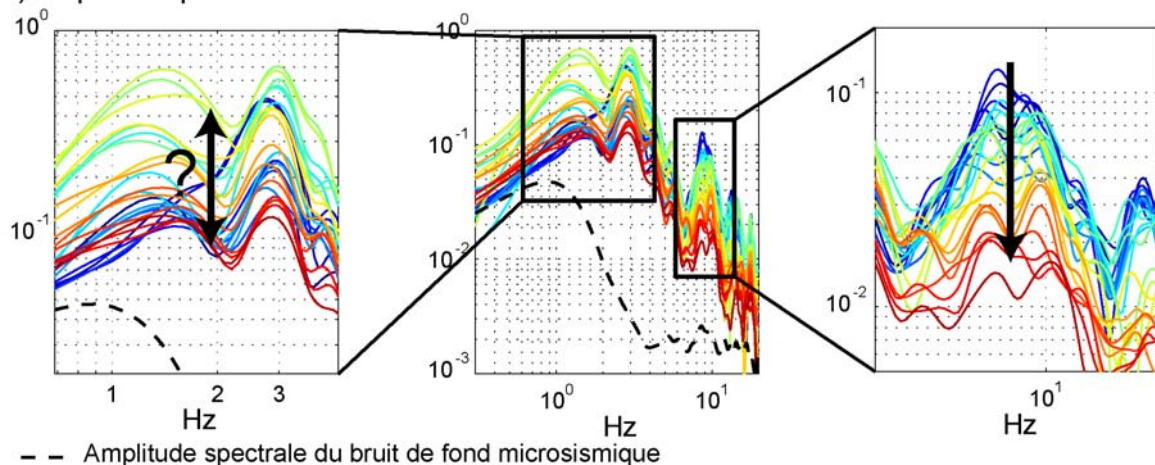


Figure III-12 : Caractère non stationnaire du comportement temps-fréquence d'un sismogramme du Kursk, courbe en trait pointillé noir correspond à l'amplitude spectrale du bruit de fond sismique.

Néanmoins, même si pris dans son ensemble le signal sismique n'est pas stationnaire, il peut éventuellement être stationnaire sur des durées plus réduites correspondant par exemple à une phase sismique particulière. En effet, celles-ci sont souvent constituées de multi-réflexions qui peuvent dans une certaine mesure être considérées comme un bruit stationnaire. Mais si

l'on veut pouvoir correctement estimer la fonction source du mouvement sismique, encore faut-il que celui-ci soit un bruit blanc...

III.4.2 Déconvolution à phase minimale des différentes phases sismiques

III.4.2.1 L'algorithme

C'est ce que nous avons testé, en appliquant la déconvolution à phase minimale aux différentes phases sismiques de nos enregistrements du réseau ARCESS. Nous nous sommes intéressés aux phases sismiques classiques généralement rencontrées à une distance épacentrale de 451km, c'est-à-dire dans l'ordre d'arrivée : phase Pn, Pg, Sn et Lg (voir Figure III-11). Nous avons aussi traité la coda des ondes P ainsi que celle des ondes Lg. Sur chaque phase sismique, nous avons utilisé un algorithme (voir Figure III-13) de type déconvolution à phase minimale basé sur les relations de Bode-Bayard (Chapitre 2).

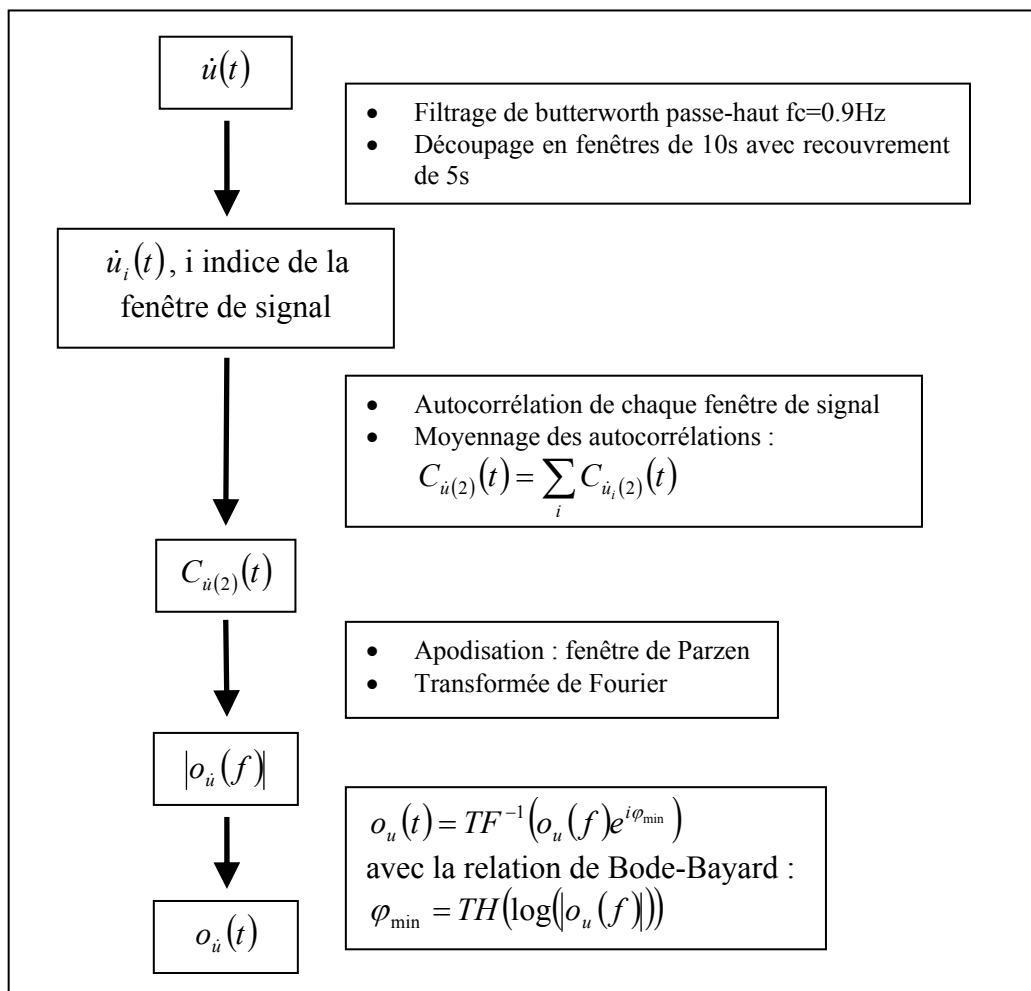


Figure III-13 : Algorithme d'extraction de l'ondelette « source » équivalente à phase minimale des différentes phases sismiques.

La durée de chaque phase traitée est au moins supérieure à 10s de façon à avoir une fenêtre de signal traité par phase. Lorsque la durée de la phase est supérieure à 10 secondes, le signal est alors découpé en plusieurs fenêtres de 10s avec une longueur de recouvrement de 5s. Les autocorrélations de chacune de ces fenêtres sont alors moyennées. Après apodisation par une fenêtre de Parzen, on calcule l'amplitude spectrale $|o_u(f)|$ associée à cette fonction d'autocorrélation moyenne. La phase minimale associée à cette amplitude spectrale est ensuite calculée par les relations de Bode-Bayard. Enfin, par transformée de Fourier inverse, on obtient l'ondelette équivalente à phase minimale $o_u(t)$ de la phase sismique étudiée. En procédant de la même manière sur toutes les stations du réseau, nous avons alors calculé l'ondelette phase minimale moyenne sur tout le réseau ainsi que l'écart-type associé.

III.4.2.2 Les ondelettes « sources » équivalentes à phase minimales obtenues

Les ondelettes phases minimales moyennes de chaque phase sismique sont présentées sur la (Figure III-14).

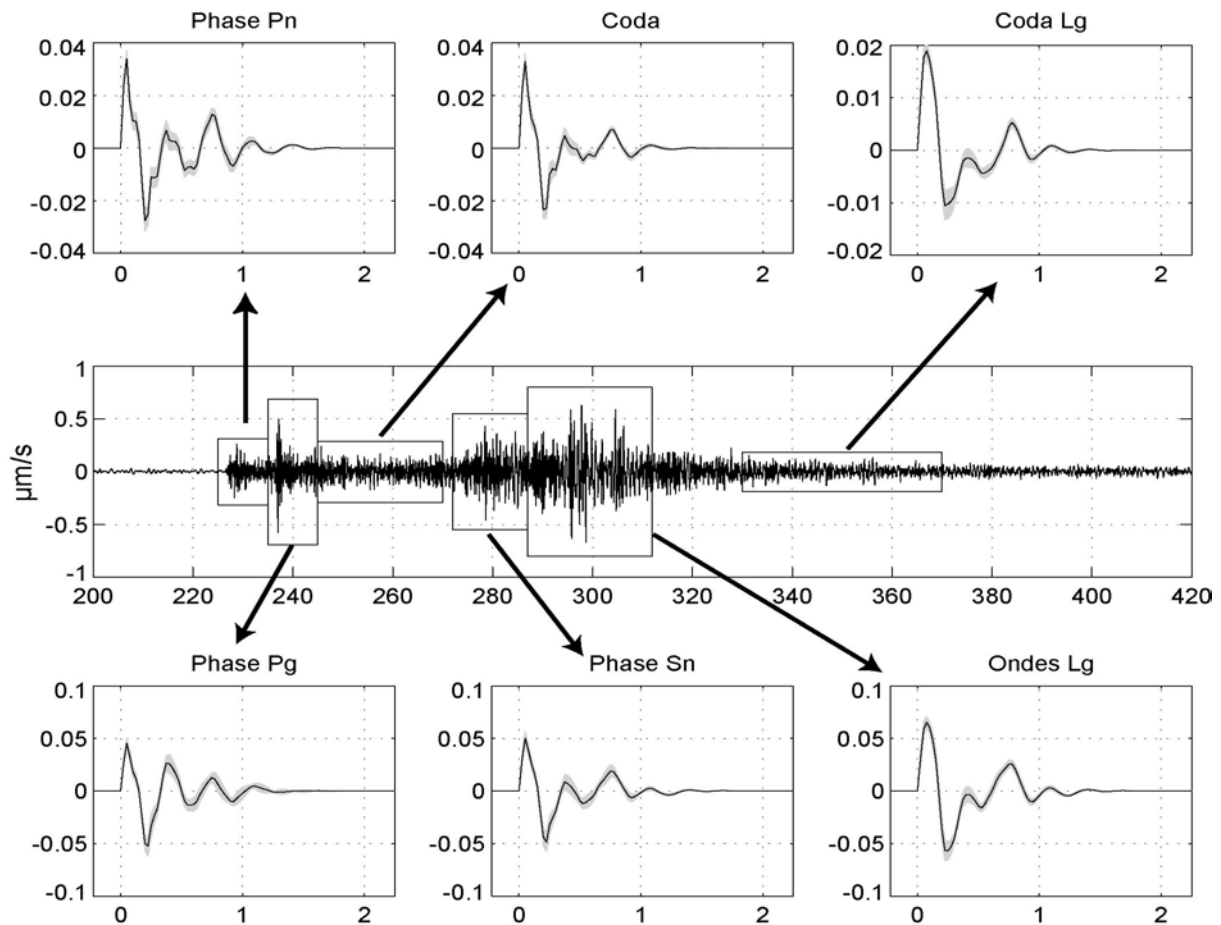


Figure III-14 : Ondelettes à phase minimale estimées sur les différentes phases sismiques.

L'ondelette de la phase des ondes Pn fait très clairement apparaître la réflexion sur la surface de la mer, ainsi que l'effet de bulle. Néanmoins, on observe deux types de signaux parasites : une oscillation haute fréquence entre le premier pulse et son écho sur la surface de la mer, et une oscillation parasite basse fréquence après l'effet de bulle.

L'ondelette associée à la phase Pg est tellement altérée par la propagation qu'il est impossible d'identifier clairement onde de choc, réverbération et effet de bulle.

Par contre, l'ondelette associée au signal de coda des ondes P montre très clairement les différentes caractéristiques fondamentales de la fonction source d'une explosion sous-marine : Onde choc, pulse d'oscillation de bulle et réverbération à l'intérieur de la mer (Figure III-15). Pour s'en convaincre, on pourra d'ailleurs la comparer avec l'ondelette synthétique associée à une explosion sous-marine située au fond de la mer à 120m de profondeur, avec un paramètre B de l'ordre de 0.5 et une période de 0.71s (Figure III-9).

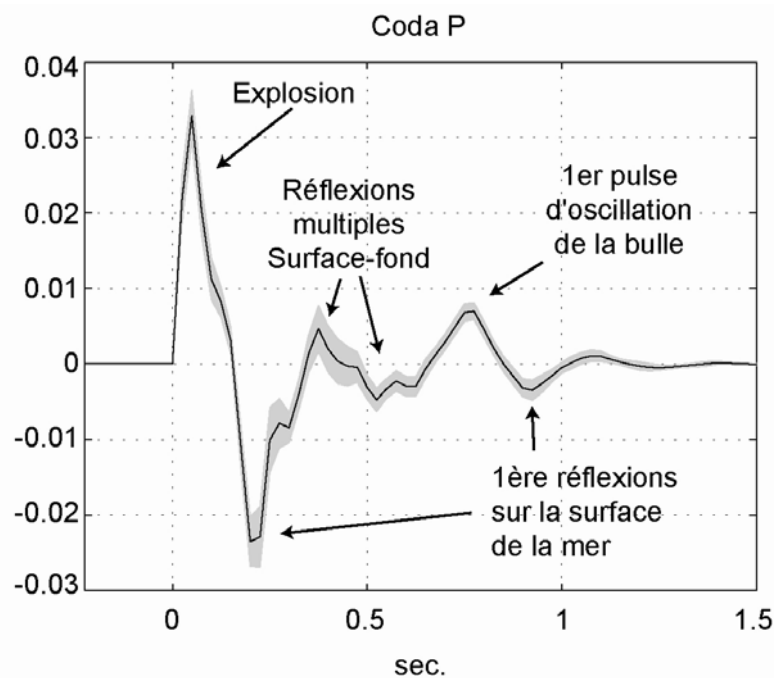


Figure III-15 : L'ondelette phase minimale estimée sur le signal de coda des ondes P.

En ce qui concerne les ondelettes des phases Sn et Lg, on peut dans une certaine mesure assez bien identifier le pulse associé à l'explosion. Cependant la largeur des différents pulses composant ces ondelettes est assez homogène, et ne révèle pas le caractère plus impulsif du pulse d'explosion. De plus, il est alors difficile de dire si le premier pulse négatif correspond à une réflexion ou s'il fait partie de la forme du premier pulse de pression. Cette difficulté est d'autant plus forte que l'on n'observe pas les multiples de la réflexion sur la surface de la mer.

L'ondelette associée à la coda des Lg est très intéressante car elle présente deux pics bien individualisés correspondant par ordre chronologique, à l'explosion et à la première oscillation de bulle. On observe juste après le pulse associé à l'explosion, un pulse négatif correspondant très vraisemblablement à la première réflexion sur la surface de la mer. De plus, les oscillations résiduelles après la première oscillation de bulle sont limitées. Cependant la largeur du pic d'explosion est, comme pour les phases Sn et Lg, du même ordre de grandeur que le pulse associé à la première oscillation de bulle.

III.4.2.3 Influence du bruit microsismique

La méthode que nous utilisons est basée sur l'autocorrélation du signal sismique, or une telle opération ne permet pas d'éliminer le bruit microsismique présent sur les enregistrements. Par conséquent une question légitime serait de savoir dans quelle mesure celui-ci peut gêner l'estimation de la fonction source. Une étude rigoureuse de l'influence du bruit sur l'ondelette à phase minimale ne peut être basée que sur l'étude du rapport signal sur bruit, mais nous en reparlerons ultérieurement. Néanmoins pour l'instant, à titre de comparaison et pour bien montrer que les ondelettes que nous avons calculées n'ont rien à voir avec du bruit microsismique, nous avons calculé l'ondelette à phase minimale du bruit de fond sismique (Figure III-16). Ainsi comme on peut le voir sur cette figure, l'ondelette du bruit sismique est d'une part, stationnaire (identique avant et après l'événement) et d'autre part, elle ne présente pas la complexité des ondelettes estimées sur l'événement sismique proprement dit (Figure III-14).

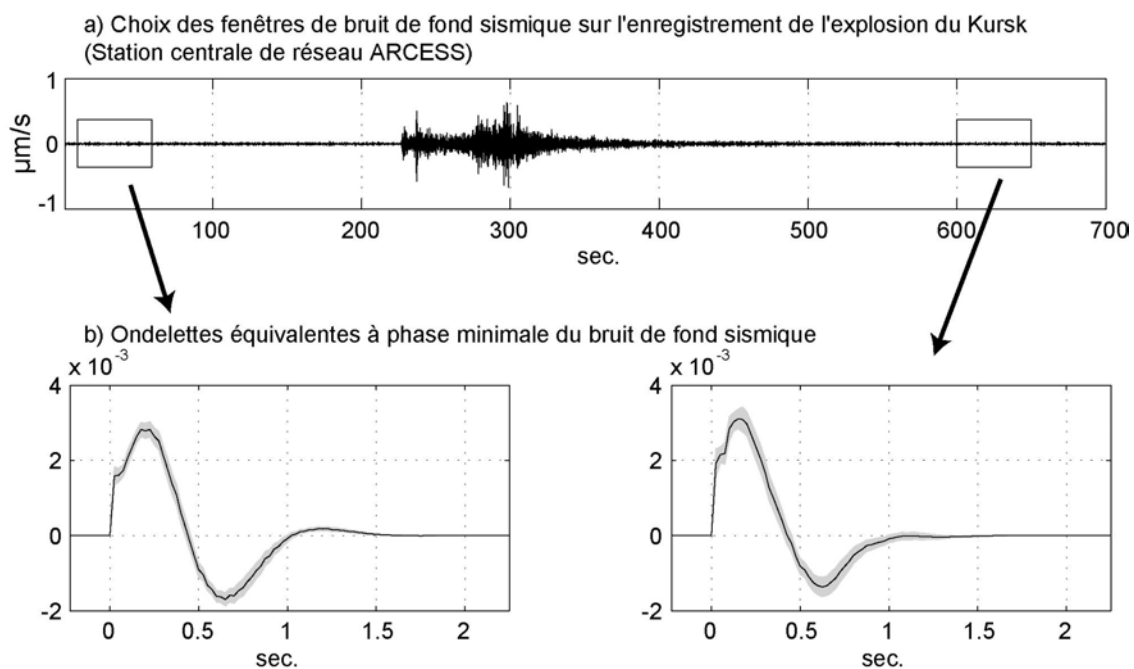


Figure III-16 : Ondelette à phase minimale du bruit de fond sismique.

En conclusion à cette étude des différentes phases sismiques, à part l'ondelette estimée sur la coda des ondes P, les ondelettes extraites des différentes phases sismiques d'un même sismogramme présentent des effets de propagation plus ou moins marqués. La subsistance de tels effets dans l'ondelette source estimée par déconvolution à phase minimale peut être due, soit au caractère non aléatoire du signal associé à la fonction de Green, soit à sa non blancheur.

Ainsi, en l'absence d'informations supplémentaires nous permettant d'estimer la fonction de Green source/récepteur, il nous est bien évidemment impossible d'en corriger l'effet afin d'obtenir la vraie fonction source. Pour y parvenir, une solution consisterait à la modéliser à partir de la structure interne régionale en utilisant par exemple la méthode des nombres d'onde discrets (Bouchon et Aki, 1977). Cependant, la précision avec laquelle on connaît la structure interne de la terre n'est pas suffisante pour que la fonction de Green modélisée puisse correctement corriger nos ondelettes du terme de propagation. Une fonction de Green empirique présentant des caractéristiques en terme de position du couple source/récepteur et en terme de mécanisme au foyer pourrait aussi nous permettre de corriger des effets de propagations. Malheureusement, il est souvent difficile de trouver une bonne fonction de Green empirique, d'ailleurs en ce qui concerne notre étude, nous n'avons pas à notre disposition de fonction de Green empirique.

Néanmoins, il existe une phase assimilable à un signal aléatoire et pour laquelle nous serions susceptibles de pouvoir estimer le terme de propagation associé. Il s'agit de la coda des ondes Lg.

III.5 Modélisation du champ d'onde de coda

Les ondes de coda correspondent à la partie décroissante d'un sismogramme, survenant après l'arrivée des ondes directes : ondes P et ondes S. En 1969, (Aki, 1969) interprète ces ondes de coda comme des ondes diffractées sur des hétérogénéités réparties de manière aléatoire à l'intérieur de la lithosphère, ces hétérogénéités pouvant consister en des contrastes de vitesse ou de densité du milieu. En 1975, Aki et Chouet (1975) proposent deux modèles physiques extrêmes pour modéliser le comportement énergétique du champ d'onde de coda : un modèle en diffraction simple (single scattering model) et un modèle diffusif. Nous allons présenter très rapidement les différents modèles utilisés pour modéliser le champ d'onde de coda dont on trouvera une description plus exhaustive dans Sato et Fehler (1998), Sato et al. (2002), Fehler et Sato (2003).

III.5.1 Modèle de diffusion simple

Le modèle de diffraction simple modélise la coda comme une superposition d'ondes n'ayant subi qu'une seule diffraction dans le milieu. Il est donc plutôt bien adapté à des milieux faiblement hétérogènes. Un modèle classique de diffraction simple consiste à utiliser l'approximation de Born²¹. Cependant, celle-ci ne prend pas en compte les pertes énergétiques liées à l'absorption intrinsèque du milieu, ainsi que celles liées à la diffraction. Il est alors nécessaire d'introduire un terme de pertes énergétiques Q_c .

En 1977, Sato (1977) étendit le modèle Aki et Chouet (1975) valable dans le cas où source et station sont superposées, au cas plus général où, source et site d'enregistrement sont distincts. Ainsi, il montre que la dépendance temporelle de la densité spectrale d'énergie du champ d'ondes diffractées dans un milieu 3D est de la forme :

$$\left\langle \dot{u}^{Scoda}(t, \omega)^2 \right\rangle_T \approx \frac{W(\omega)N(\omega)g_0(\omega)}{2\pi\rho\beta^2 t^2} e^{-\frac{\omega t}{Q_c(\omega)}} \quad \beta_0 t \gg r \quad (\text{III-16})$$

où $\left\langle \dot{u}^{Scoda}(t, f)^2 \right\rangle_T$ représente la densité spectrale de puissance d'une des composantes de la vitesse du mouvement du sol calculée sur une fenêtre de longueur T , $W(f)$ et $N(f)$ sont respectivement les densités spectrales de puissance de la fonction source et de l'effet de site. $g_0(f)$ est le coefficient de scattering total, β la vitesse de ondes S, et ρ la masse volumique du milieu.

Le facteur de qualité $Q_c(f)$ comprend les pertes d'énergie du champ d'onde sismique de coda par diffractions multiples à l'intérieur de la lithosphère, ainsi que celles dues au comportement anélastique intrinsèque des roches, Q_i . Les valeurs du facteur d'atténuation de Coda Q_c sont très variables d'une région à une autre, dépendant notamment du degré d'hétérogénéité de la croûte ainsi que de son activité sismo-tectonique (Singh et Herrmann, 1983; Jin et Aki, 1989). Néanmoins, d'une façon générale Q_c^{-1} est de l'ordre que 10^{-2} à 1Hz et atteint des valeurs de l'ordre de 10^{-3} à 20 Hz avec une dépendance fréquentielle en f^α de la forme (Herrmann, 1980; Singh et Herrmann, 1983) :

$$Q_c^{-1} \propto f^{-\alpha} \text{ pour } f > 1 \text{ Hz et avec } \alpha \sim 0.5-1 \quad (\text{III-17})$$

Le coefficient de scattering total $g_0(f)$ correspond à la valeur moyenne du coefficient de scattering g , lequel représente la proportion d'énergie rayonnée par unité de volume et par unité de temps à travers un élément d'angle solide $d\Omega$:

²¹ L'approximation de Born désigne l'approximation que l'on fait en étudiant le comportement du milieu hétérogène par une méthode perturbative au premier ordre.

$$g = 4\pi n \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{avec} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J^1 r^2}{J^0} \quad (\text{III-18})$$

où n représente la densité de diffracteurs par unité de volume, J^0 le flux d'énergie incident sur le diffracteur et J^1 le flux sphérique d'énergie rayonné par le diffracteur (Figure III-17).

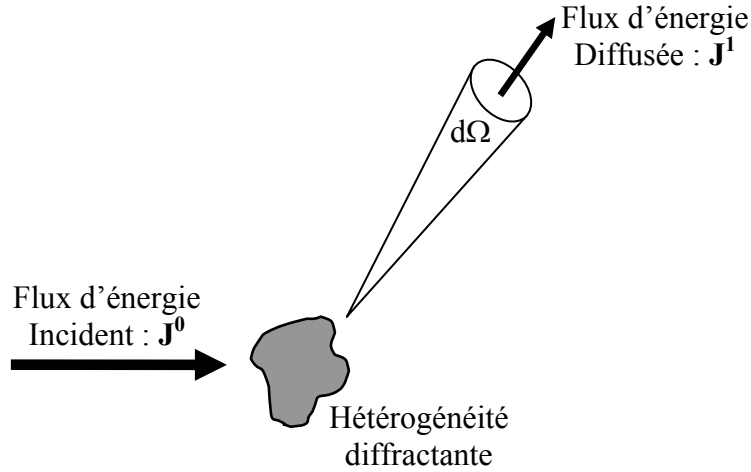


Figure III-17 : Modèle en diffraction simple : flux énergétique incident et flux énergétique rayonné par un diffracteur.

Ainsi $g_0(f)$ correspond à l'inverse du libre parcours moyen l des ondes à l'intérieur du milieu de propagation :

$$g_0(f) = \frac{1}{4\pi} \oint g d\Omega = n \oint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{l} = n\sigma_0 \quad (\text{III-19})$$

où σ_0 représente la section efficace de diffraction totale, qui permet d'une certaine façon de quantifier la proportion du flux J^0 réellement rayonné par le diffracteur.

D'autre part, $g_0(f)$ dépend directement de la distribution des hétérogénéités du milieu de propagation. Ainsi dans le cas d'un milieu où les fluctuations de vitesse peuvent être décrites par une distribution exponentielle et en considérant que la diffusion dans la croûte est isotrope : $g_\pi(f) \approx g_0(f)$, on peut montrer que $g_0(f)$ prend la forme suivante (Sato et Fehler, 1998) :

$$g_0(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{8\varepsilon^2 a^3}{\beta_0^4} \right) \omega^4 & ka \ll 1 \\ \frac{\varepsilon^2}{2a} & ka \gg 1 \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

Or comme les différentes études sismologiques qui ont travaillé sur $g_0(f)$ s'accordent à dire que l'on se trouve toujours dans le cas $ka \gg 1$, on peut considérer en première approximation

$g_0(f)$ comme constant. Bien sûr cela n'est valable que lorsque les fluctuations de vitesse de notre milieu suivent une loi statistique de type exponentielle. Nous ferons l'hypothèse dans la suite de ce travail que nous avons affaire à un milieu caractérisé par $g_0(f) \approx cste$ comme un milieu de type exponentiel.

III.5.2 Le modèle diffusif

Le modèle diffusif correspond au cas extrême opposé, où le champ d'ondes sismiques est essentiellement constitué d'ondes multi-diffusées. Un tel champ d'onde correspond, par exemple, à une propagation au sein d'un milieu très hétérogène. Ou, plus généralement, il est associé à la partie la plus tardive de la coda d'un sismogramme, constituée d'ondes avec des temps de propagation plusieurs fois supérieurs au temps mis par les ondes directes pour parcourir la distance source-station r ($\beta t \gg r$).

Ce modèle initialement utilisé par Wesley (1965) puis repris ensuite par Aki et Chouet (1975), consiste à considérer que l'évolution spatio-temporelle de l'énergie dans le milieu suit une équation de diffusion. Ainsi, si on appelle $E(x, t, \omega)$ la quantité d'énergie par unité de volume du milieu pour un intervalle de fréquence centré sur ω , $E(x, t, \omega)$ vérifie donc l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - D_c \nabla^2 E + \frac{\omega}{Q} E = W(\omega) \quad (\text{III-21})$$

où D_c est le coefficient de diffusivité du milieu qui, dans le cas d'une diffusion isotrope, s'exprime en fonction de g_0 ou du libre parcours moyen de transport l^* de la façon suivante :

$$D_c = \frac{\beta}{3g_0} = \frac{\beta l^*}{3} \quad (\text{III-22})$$

Le terme $\omega E/Q$ permet de prendre en compte les pertes énergétiques associées au comportement anélastique du milieu, Q représente donc le facteur de qualité de l'atténuation intrinsèque. Enfin, $W(\omega)$ représente l'énergie totale rayonnée par la source pour une bande de fréquence unité centrée sur ω . La solution analytique de l'équation (III-21) pour un point source en temps et espace est de la forme :

$$E(x, t, \omega) = \frac{W(\omega)}{(4\pi D_c t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4D_c t} - \frac{\omega}{Q} t} H(t) \quad (\text{III-23})$$

où r est la distance source-station et $H(t)$ est la distribution d'Heaviside.

Les conditions d'application classique à des données réelles sont telles que l'on a le plus souvent $r^2/D_c t \ll 1$ (temps grand et courte distance). Ainsi, en remplaçant la densité spectrale d'énergie $E(x, t, \omega)$ par son expression en fonction du champ de vitesse sismique $\dot{u}^{Scoda}(t)$ sur l'une des composantes d'un enregistrement sismique (Sato et Fehler, 1998) :

$$E(x, t, \omega) = \left\langle \sum_{i=1}^3 \frac{\rho}{2} \left| u_i^{Scoda}(t, \omega) \right|^2 + \text{Energie élastique} \right\rangle_T \approx \sum_{i=1}^3 \rho \left\langle \left| u_i^{Scoda}(t, \omega) \right|^2 \right\rangle_T \quad (\text{III-24})$$

$$\approx 3\rho \left\langle \left| \dot{u}^{Scoda}(t, \omega) \right|^2 \right\rangle_T$$

l'équation (III-23) devient :

$$\left\langle \dot{u}^{Scoda}(t, \omega)^2 \right\rangle_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{W(\omega)}{\rho(4\pi D_c t)^{3/2}} e^{-\frac{\omega}{Q} t} H(t) \quad (\text{III-25})$$

où ρ représente la masse volumique de milieu de propagation et le coefficient 2 permet de prendre en compte l'effet de surface libre.

Comme ces deux modèles représentent les deux comportements extrêmes d'un milieu diffusif, ils ne seront par conséquent qu'une approximation du comportement réel du milieu de propagation. Dans notre étude, préliminaire, de la fonction source de l'explosion du Kursk, nous avons choisi de n'utiliser que le modèle en diffraction simple.

Cependant, afin de mieux apprécier si le comportement du milieu est plus proche de l'un de ces deux modèles, nous comparerons les résultats fournis par ces deux modèles dans une étude ultérieure sur le séisme de Rambervillers dans le Chapitre 4.

III.5.3 La théorie du transfert radiatif

Néanmoins, notons que même si dans un premier temps nous n'avons pas décidé de l'utiliser, l'introduction en sismologie de l'équation de transfert radiatif acoustique par Wu (1985) a permis de concilier ces deux modèles extrêmes dans une même équation. Par la suite, Zeng et al. (1991) fournissent une expression générale de l'évolution temporelle de l'énergie du champ d'ondes sismiques multi-diffusées dans un milieu 3D pour une source « sphérique ». Enfin, Sato et al. (1997) firent de même dans le cas d'une dislocation. Ainsi, l'adaptation à la sismologie de l'équation de transfert radiatif, qui fut développée à l'origine par les astrophysiciens (Chandrasekhar, 1960), a permis aux sismologues de modéliser correctement l'enveloppe d'un sismogramme dans son ensemble. Par ailleurs, l'application de cette théorie du transfert radiatif au cas d'un milieu semi-infini a permis à un certain nombre d'auteurs

(Mayeda et al., 1991b; Fehler et al., 1992; Hoshiba, 1993) de développer des techniques leur permettant de séparer l'atténuation intrinsèque et celle causée par le scattering.

III.6 Correction de l'effet de la propagation sur les ondes de coda

Comme nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, nous allons faire l'hypothèse que les fluctuations de vitesse de la croûte au Nord de la Norvège ont une distribution proche de celle d'une loi exponentielle. Ainsi, en considérant de plus, l'absence d'effet de site au niveau du sismomètre, la puissance du signal de coda à une fréquence f est de la forme :

$$\left\langle \left| \dot{u}^{S_{coda}}(t, f) \right|^2 \right\rangle_T = K.W(f) \frac{e^{-Q_c^{-1}(f)2\pi ft}}{2\pi\rho\beta_0^2 t^2} \quad (\text{III-26})$$

où K est un facteur multiplicatif indépendant de la fréquence et comportant g_0 qui ne dépend alors pas de la fréquence.

Par conséquent, le terme de propagation comporte donc le terme d'atténuation :

$$\left\langle \left| p(f, t) \right|^2 \right\rangle_T = \frac{e^{-Q_c^{-1}(f)2\pi ft}}{2\pi\rho\beta_0^2 t^2} \quad (\text{III-27})$$

De plus, comme nous le montre l'équation précédente, la densité spectrale de puissance (dsp) du terme d'atténuation à un instant t , $\left\langle \left| p(f, t) \right|^2 \right\rangle_T$ est complètement déterminée par $Q_c^{-1}(f)$. Ainsi, si on est capable d'estimer $Q_c^{-1}(f)$, on sera capable de quantifier la dsp du terme d'atténuation $\left\langle \left| p(f, t) \right|^2 \right\rangle_T$, étape préliminaire indispensable, si on désire en corriger l'effet sur la dsp des ondes de coda.

Cependant, si l'on veut revenir à une équation temporelle, comme une équation de convolution par exemple, on va être confronté à deux problèmes majeurs. Le premier est le caractère non-stationnaire de l'équation (III-26) dû à $\left\langle \left| p(f, t) \right|^2 \right\rangle_T$. Le filtre associé à $\left\langle \left| p(f, t) \right|^2 \right\rangle_T$ ne pourra pas être modélisé par un SLIT, mais plutôt par un filtre dont la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$ sera variable au cours du temps. Par conséquent, la formulation temporelle de l'équation (III-26) ne peut correspondre à un simple produit de convolution classique, mais elle prendra la forme d'un produit de convolution non-stationnaire :

$$\dot{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_h(\theta) p(t - \theta, t) d\theta \quad (\text{III-28})$$

où $s_h(\theta)$ représente l'ondelette source du mouvement sismique convoluée avec la « réflectivité » du milieu.

D'autre part, et c'est notre deuxième difficulté, pour pouvoir estimer la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$ associée au terme de propagation, il nous faut aussi connaître sa phase qui, malheureusement, ne nous est pas fournie par les études énergétiques classiques de la coda (équation III-16 ou équation III-25). D'une manière analogue au choix de la phase du terme d'atténuation intrinsèque Q_I (Aki et Richards, 1980), nous avons fait l'hypothèse que la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$ aux différents temps t_0 est à phase minimale.

Enfin, nous voulons juste faire une remarque de vocabulaire concernant ce que nous appelons la « réflectivité » du milieu. En toute rigueur, celle-ci devrait comporter un terme qui n'apparaît pas directement dans l'équation énergétique (III-26), car il est inclus dans le terme constant K , il s'agit de l'effet de toutes les réflexions et diffractions sur les hétérogénéités du milieu : g_0 . Ainsi, on appelle $h_r(t)$ la « réflectivité » du milieu, c'est-à-dire le signal aléatoire associé à toutes les réflexions multiples et diffractions à l'intérieur du milieu de propagation, telle que sa densité spectrale de puissance soit égale à $g_0(f)$. $h_r(t)$ est donc un bruit blanc puisque par hypothèse $g_0(f)$ est considéré comme étant constant. La couleur de la fonction de Green $h_{Lg}(t)$ du signal de coda des ondes Lg, c'est-à-dire « réponse impulsionnelle associée au terme de propagation du champ d'onde de coda », est donc contrôlée par le terme $p(t, t_0)$. $h_{Lg}(t)$ est par conséquent de la forme :

$$h_{Lg}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_r(\theta) p(t - \theta, t) d\theta \quad (\text{III-29})$$

Le mouvement sismique $\dot{u}(t)$ s'exprime donc simplement à l'aide d'un produit de convolution stationnaire entre $h_{Lg}(t)$ et $s(t)$:

$$\dot{u}(t) = h_{Lg}(t) * s(t) \quad (\text{III-30})$$

Ainsi, afin d'estimer l'ondelette source à phase minimale corrigée du terme de propagation à partir du signal de coda des ondes Lg, nous avons utilisé un algorithme en trois étapes :

- Estimation de $Q_c(f)$
- Correction de la coda Lg de l'effet du terme de propagation $\langle |p(f, t)|^2 \rangle_T$ par déconvolution non stationnaire.

- Estimation de l'ondelette source par déconvolution à phase minimale de ce signal de coda stationnarisée

III.6.1 Estimation de Qcoda

Nous avons utilisé la méthode développée par (Aki, 1969; Aki et Chouet, 1975). Elle consiste à étudier la décroissance de l'enveloppe de l'énergie du signal de coda à différentes fréquences. Nous avons donc filtré le sismogramme par un ensemble de filtres à bande étroite centrée sur des fréquences distinctes :

$$[1.05 \ 1.34 \ 1.71 \ 2.19 \ 2.80 \ 3.58 \ 4.57 \ 5.85 \ 7.48 \ 9.56 \ 12.23 \ 15.64](\text{III-31})$$

Afin de pouvoir échantillonner la valeur $Q_c(f)$ sur plusieurs ordres de grandeur en fréquence $[0.9 \ 10]\text{Hz}$, sans forcément multiplier de façon excessive le nombre de filtres à utiliser, nous avons positionné les fréquences centrales de notre banc de filtres à intervalle régulier sur une échelle logarithmique en fréquence. D'autre part, toujours dans un souci d'optimisation et de précision de notre estimation de $Q_c(f)$, la largeur de bande des filtres a été choisie constante en échelle logarithme. Nous avons donc réalisé un banc de filtres de type FIR par la méthode des fenêtres (Oppenheim et Schaffer, 1975) dont la durée T_{w_n} est fonction de la largeur de bande du filtre de fréquence centrale f_n (Figure III-18-a) suivant la relation:

$$T_{w_n} = \frac{3}{2f_n} \quad (\text{III-32})$$

Par ailleurs, nous avons choisi une fenêtre de Blackman pour son caractère très sélectif (Figure III-18-b) puisque celle-ci présente une bande atténuée de -60dB (Max et Lacoume, 1996).

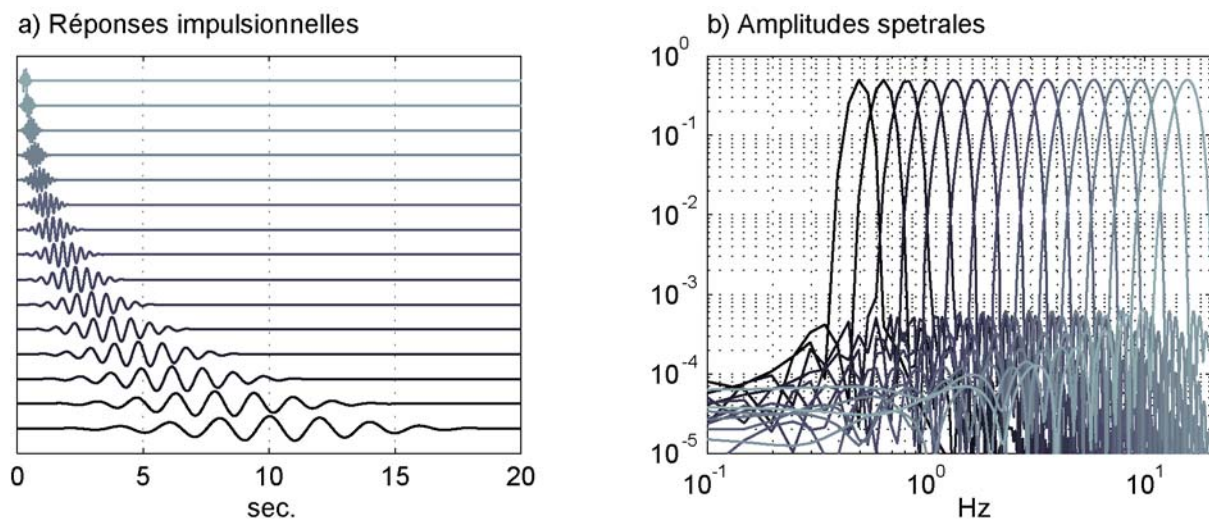


Figure III-18 : Caractéristiques temporelles et spectrales du banc de filtre passe bande de type FIR, utilisé pour étudier les caractéristiques temps-fréquences de la coda Lg.

L'opération de filtrage des sismogrammes qui, en raison de la structure du banc de filtre que nous utilisons, est très proche d'un traitement en ondelette, nous fournit 9 signaux représentant le contenu fréquentiel du signal sismique aux fréquences (III-31).

La puissance instantanée de ces signaux mono-fréquentiels est estimée à partir de l'amplitude de leur signal analytique respectif, filtré par une fenêtre de Hanning de 10 secondes. Le coefficient $Q_c(f_n)$ est alors obtenu en calculant la pente du logarithme de la puissance instantanée du signal analytique de fréquence f_n (Figure III-19).

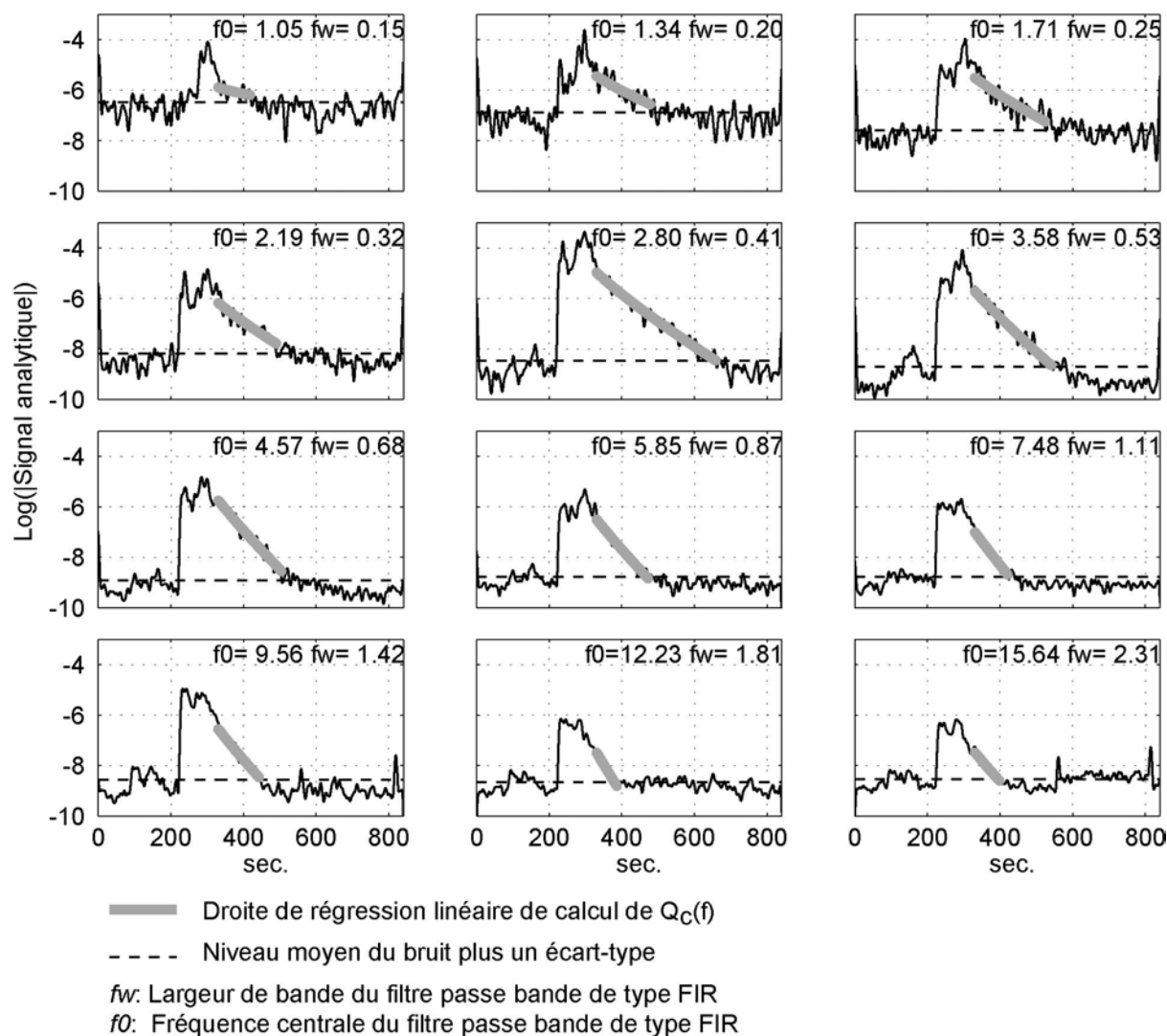


Figure III-19 : Représentation du logarithme de l'amplitude du signal analytique obtenu par transformée de Hilbert du sismogramme filtré sur différentes bandes fréquentielles (trait fin noir) ; droite de régression du calcul de $Q_c^{-1}(f_n)$ (trait épais gris).

Comme on peut le voir sur cette figure qui représente le logarithme de la puissance instantanée de la vitesse du sol, la décroissance du logarithme de l'énergie du champ d'onde de coda est effectivement linéaire.

En effet, si l'on prend le logarithme de l'équation (III-26), on obtient une relation linéaire de la forme :

$$\log\left(\left\langle \dot{u}_{ij}^{Scoda}(t, f_n)^2 \right\rangle_T\right) = \log\left(\frac{K.W_i(f_n)}{2\pi\beta_0^2}\right) - 2\log(t) - 2\pi f_n t Q_c^{-1}(f_n) \quad (\text{III-33})$$

qui en posant $X = \begin{bmatrix} Q_c^{-1}(f_n) & \log\left(\frac{K.W_i(f_n)}{2\pi\beta_0^2}\right) \end{bmatrix}^T$, $M = \begin{bmatrix} -2\pi f_n t_1 & -2\pi f_n t_2 & \cdots & -2\pi f_n t_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ et

$Y = \left[\log\left(t_1^2 \left\langle \dot{u}_{ij}^{Scoda}(t_1, f_n)^2 \right\rangle_T\right) \quad \log\left(t_2^2 \left\langle \dot{u}_{ij}^{Scoda}(t_2, f_n)^2 \right\rangle_T\right) \quad \cdots \quad \log\left(t_k^2 \left\langle \dot{u}_{ij}^{Scoda}(t_k, f_n)^2 \right\rangle_T\right) \right]^T$ s'écrit

simplement sous la forme système suivant:

$$Y = MX \quad (\text{III-34})$$

Ainsi, par régression linéaire par moindres carrés, on obtient une estimation de $Q_c^{-1}(f_n)$ suivant l'équation :

$$X = (M^T M)^{-1} M^T Y \quad (\text{III-35})$$

D'un point de vue pratique, concernant le choix de l'intervalle $[t_1, t_k]$ sur lequel on effectue la régression, t_1 correspond à l'instant à partir duquel la décroissance du logarithme de l'énergie suit une loi linéaire. Nous avons donc choisi $t_1 = 168s$ après le temps origine de l'explosion. t_k , quant à lui, correspond à l'instant à partir duquel l'énergie du signal de coda est inférieure à l'énergie du bruit sismique plus un écart-type (voir Figure III-19). Il varie donc d'une bande de fréquence à une autre en fonction du rapport signal sur bruit.

Nous avons procédé de la même façon sur les 25 enregistrements du réseau ARCESS. La Figure III-20 présente la valeur moyenne $Q_c^{-1}(f)$ obtenue sur l'ensemble des stations, ainsi que son écart-type. On obtient des valeurs de $Q_c^{-1}(f)$ de l'ordre 9.10^{-4} à 3Hz.

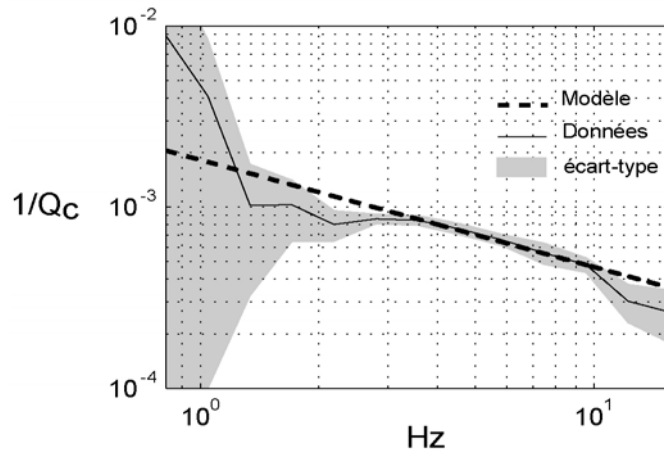


Figure III-20 : Estimations expérimentales et modélisation de la dépendance fréquentielle de Q_c .

III.6.2 Correction du terme de transport du champ d'ondes de coda

Afin de limiter l'effet du bruit de l'estimation de $Q_c^{-1}(f_n)$ sur l'opération de stationnarisation, la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$ n'est pas estimée directement à partir des mesures mais à partir d'un modèle dont nous allons estimer les paramètres.

III.6.2.1 Modélisation de $Q_c^{-1}(f_n)$

Notre estimation de $Q_c^{-1}(f)$ ne présente un faible écart-type que pour des valeurs de fréquence comprise entre 3 et 10Hz. De plus la variation linéaire $Q_c^{-1}(\log(f))$ sur cet intervalle, nous permet d'envisager un modèle classique de type :

$$Q_c^{-1}(f) = Q_0^{-1} f^{-\alpha} \quad (\text{III-36})$$

On remarquera qu'à basse fréquence $Q_c^{-1}(f)$ semble tendre vers une valeur constante. Cependant, en dessous de 2Hz, le rapport signal sur bruit est trop élevé pour nous permettre de conclure sur le comportement basse fréquence de $Q_c^{-1}(f)$.

Dans un premier temps nous avons négligé ce comportement basse fréquence et nous nous sommes limités à une estimation par moindres carrés des paramètres du modèle (III-36) sur l'intervalle [3,10] Hz. Nous avons donc obtenu un modèle de la forme Figure III-20:

$$Q_c(f) = 549 f^{0.59} \quad (\text{III-37})$$

Cette valeur, plus forte que les valeurs classiques de Q_c observées pour la croûte est tout de même compatible avec les mesures obtenues dans cette région de la mer de Barents (Kijko et Mitchell, 1983) qui est modélisable par une couche de 16km d'épaisseur de $Q_\beta=250$, reposant sur un substratum rocheux avec un $Q_\beta=1000$.

Nous allons maintenant utiliser ce modèle afin d'estimer la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$ du terme de propagation que nous avons choisi comme étant à phase minimale.

III.6.2.2 Stationnarisation du signal de coda

Puisque la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$ varie au cours du temps, nous ne pouvons pas déconvoluer le signal de coda par une seule et même réponse impulsionnelle. Chaque échantillon à un instant t_n du signal stationnarisé est obtenu par déconvolution du signal de coda par la réponse impulsionnelle à phase minimale $p(t, t_n)$ évaluée au temps t_n (Figure III-22). De plus, afin d'éviter les instabilités inhérentes à toute opération de déconvolution nous avons utilisé une déconvolution de type water-level (Chapitre 2).

L'algorithme que nous avons donc utilisé pour réaliser cette déconvolution non stationnaire travaille échantillon par échantillon. La Figure III-21 nous en explique les différentes étapes.

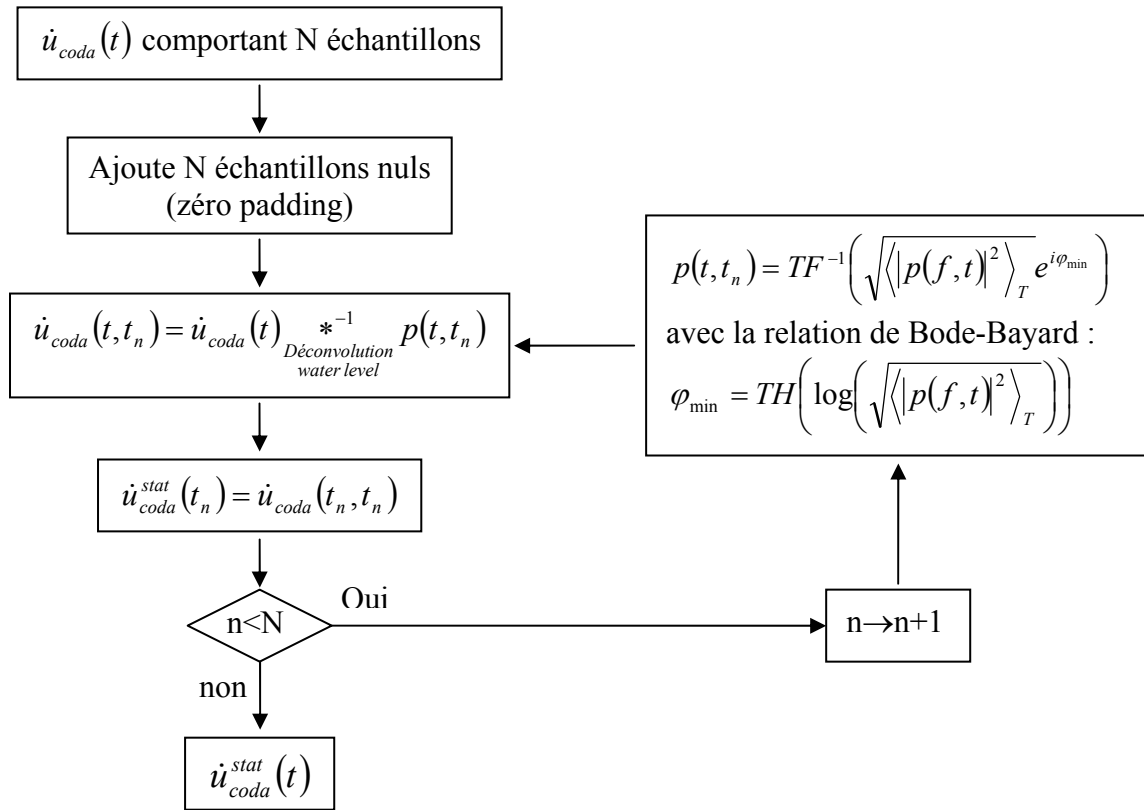


Figure III-21 : Algorithme de stationnarisation du signal de coda.

Comme on peut le voir sur la Figure III-22-b représentant l'amplitude spectrale du terme $p(t, t_0)$, il s'agit d'un filtre basse bas. Le filtre inverse associé sera donc un filtre passe haut qui va amplifier préférentiellement le contenu haute fréquence du signal.

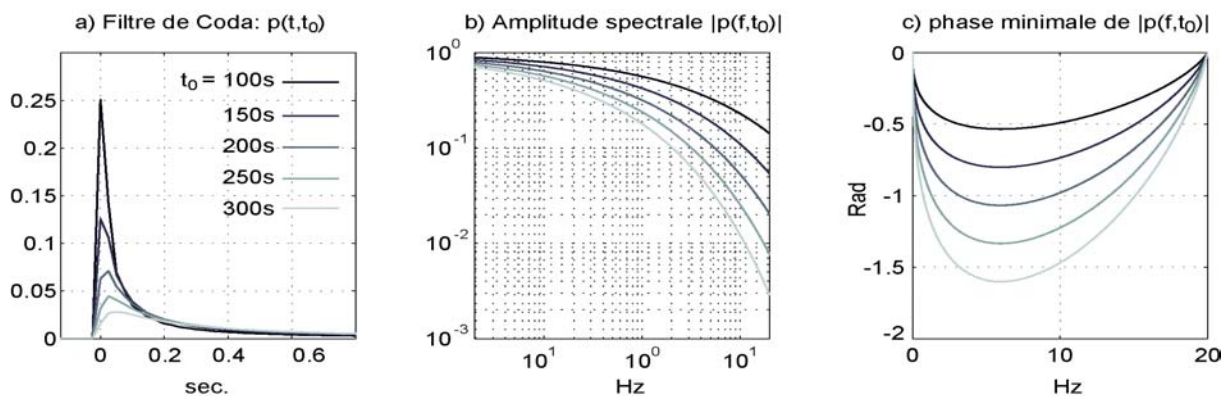


Figure III-22 : Caractéristique temporelle et spectrale du « filtre de Coda » phase minimale.

Il faudra veiller à ne pas amplifier le bruit, c'est d'ailleurs la raison pour laquelle on utilise un algorithme de déconvolution par water-level. Seulement, puisque le signal de coda est un signal non-stationnaire, s'atténuant au cours du temps, nous devons tout de même veiller à ce

que nous avons toujours suffisamment d'information dans notre signal et donc contrôler que le rapport signal sur bruit soit toujours supérieur à 1.5. La Figure III-23-c représente d'ailleurs l'évolution du rapport signal sur bruit au cours du temps. L'absence de couleur (partie blanche) signale que le rapport signal sur bruit à cette fréquence est inférieur 1.5. On observe qu'aux alentours de 20 Hz le rapport signal sur bruit est toujours inférieur à 1.5. Cette absence d'information aux hautes fréquences, due au filtre anti-aliasing est prise en charge par la procédure de water-level. Si on s'intéresse à l'ensemble de la bande de fréquence, on remarque que jusque 360s l'ensemble de la bande de fréquence 1-19Hz celle-ci présente un rapport signal sur bruit supérieur à 1.5 sauf au niveau des creux fréquentiels à 12Hz et 17Hz. Au-delà de 360s mis à part une arrivée énergétique aux alentours de 370s, l'ensemble de la bande 12-20Hz à un rapport signal sur bruit inférieur à 1.5.

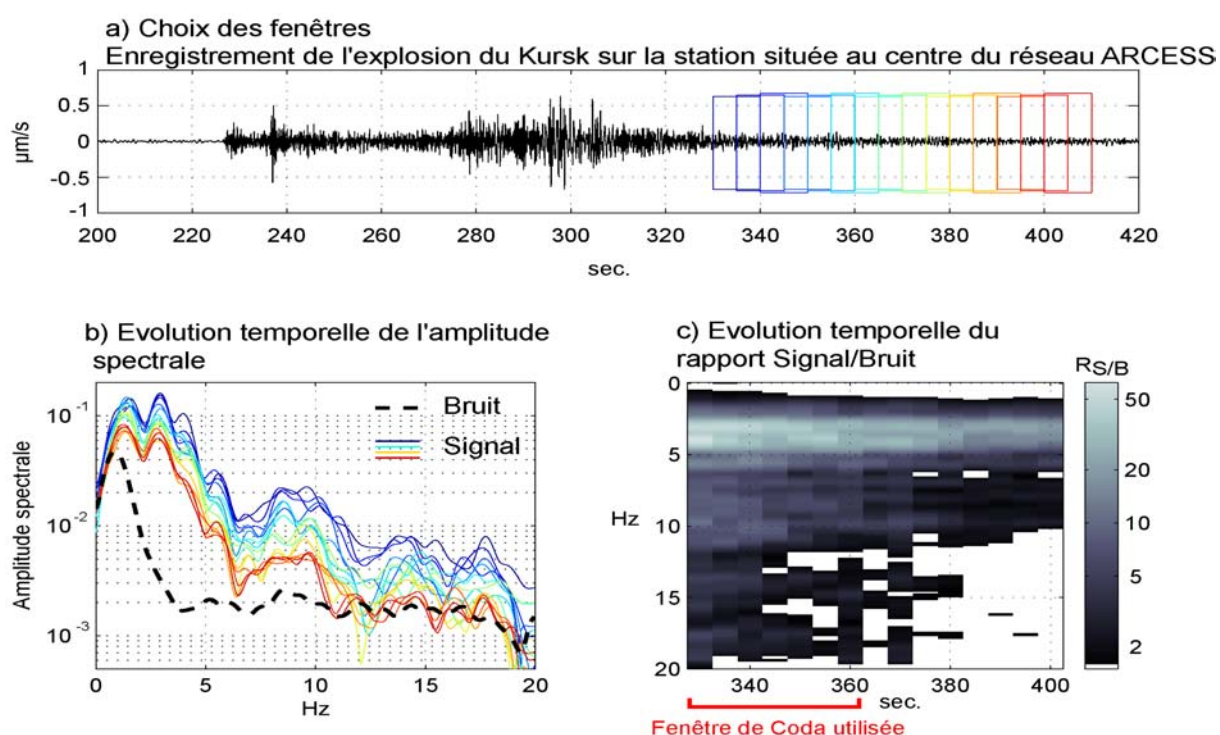


Figure III-23 : Etude de l'évolution temporelle du rapport Signal/Bruit et choix de la fenêtre optimale pour l'opération de stationnarisation : filtrage inverse par $p(t, t_n)$.

Nous avons donc « stationnarisé » notre signal seulement sur la fenêtre de signal comprise entre 330s et 365s. Au-delà, si nous poursuivions le traitement, nous amplifierions essentiellement du bruit. C'est ce que l'on observe sur la Figure III-24. L'ondelette obtenue à partir d'une fenêtre de signal [385, 425] secondes Figure III-24-d présente un pulse d'explosion très étroit, très proche de l'ondelette phase minimale d'un bruit blanc : un dirac.

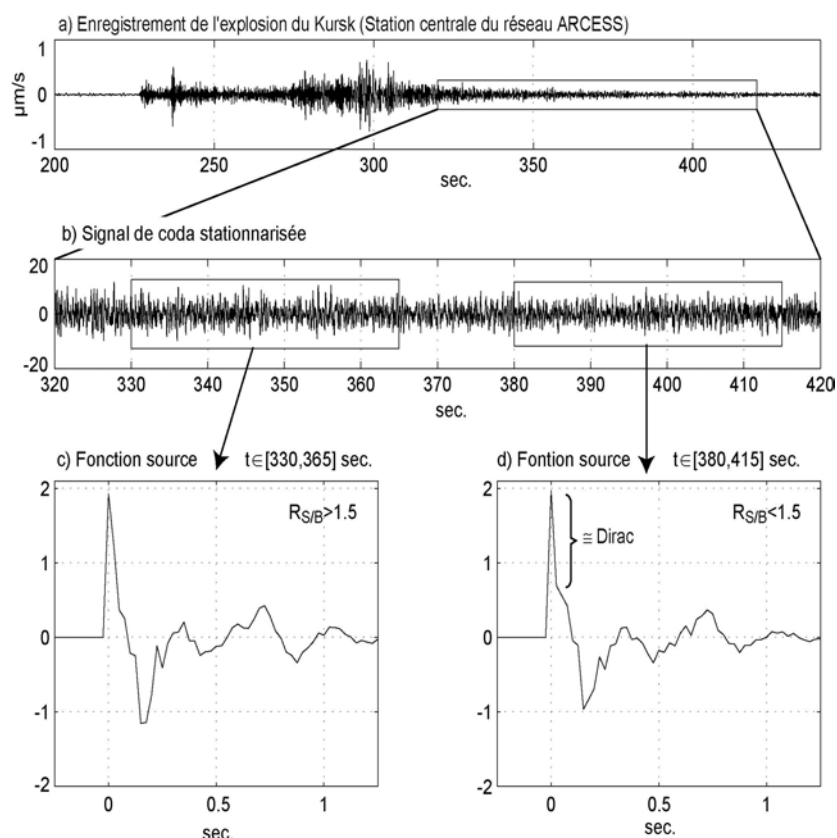


Figure III-24 : Effet du bruit sur l'estimation de l'ondelette à phase minimale.

III.6.2.3 Pourquoi n'estime-t-on pas directement la fonction source à partir de l'équation (III-26) ?

En effet, lors de l'estimation de Q , on estime aussi un terme directement proportionnel à l'amplitude spectrale de la fonction source « corrigé du terme de propagation ». Il peut donc paraître quelque peu complexe de retourner en domaine temporel pour effectuer de surcroît, une déconvolution non stationnaire de notre signal sismique afin d'en estimer la fonction source corrigée à phase minimale. D'ailleurs, l'étude de la source sismique à partir de la coda est une méthode ancienne (Aki et Chouet, 1975; Chouet et al., 1978; Rautian et Khalturin, 1978). Cependant, contrairement à ces études, nous voulons identifier la forme temporelle de la fonction source du mouvement sismique et pas seulement ses caractéristiques spectrales globales. Ainsi, pour conserver toutes les caractéristiques temporelles de la fonction source d'un événement sismique, il nous faudra estimer son spectre avec une résolution fréquentielle suffisante pour que soit vérifié le théorème de l'échantillonnage en fréquence. En effet, même si le nombre restreint de fréquences (de l'ordre de 10) utilisé est largement suffisant pour modéliser le comportement fréquentiel de Q_c , il est bien sûr insuffisant pour prendre en compte toutes les finesses de la fonction source. Ainsi pour modéliser l'ondelette source du Kursk qui a une durée de l'ordre de 1 seconde, il faudrait calculer le spectre d'un signal de 2s

échantillonné à 40Hz. Cela représente pas moins de 40 estimations en fréquence (en utilisant les propriétés de symétrie) avec un pas de 0.5Hz, augmentant ainsi la charge de calcul. D'autre part, la résolution fréquentielle de l'estimation « directe » à partir de l'équation (III-26), dépend non seulement du nombre de fréquences, mais aussi du type de filtrage par bande utilisé pour extraire Q_c et les caractéristiques spectrales de la source. En effet, l'opération de filtrage par bande du signal de coda de la méthode de traitement proposée par Aki (1969) et Aki et Chouet (1975), a pour conséquence de lisser ou moyenner l'estimation spectrale de la fonction source sur la largeur de bande du filtre.

L'opération de stationnarisation nous permet donc d'estimer le spectre de la fonction source en utilisant un signal d'une durée de plusieurs dizaines de secondes. Le spectre ainsi obtenu a l'avantage de présenter une très bonne résolution fréquentielle dont on contrôlera la qualité et la variance grâce à la fonction d'apodisation.

III.7 Estimation de l'ondelette source « corrigé » par déconvolution à phase minimale

Nous avons donc appliqué notre algorithme de déconvolution à phase minimale sur les signaux de coda stationnarisés du réseau ARCESS. La forme d'onde moyenne obtenue sur l'ensemble du réseau, ainsi que son écart-type, sont représentés sur la Figure III-25.

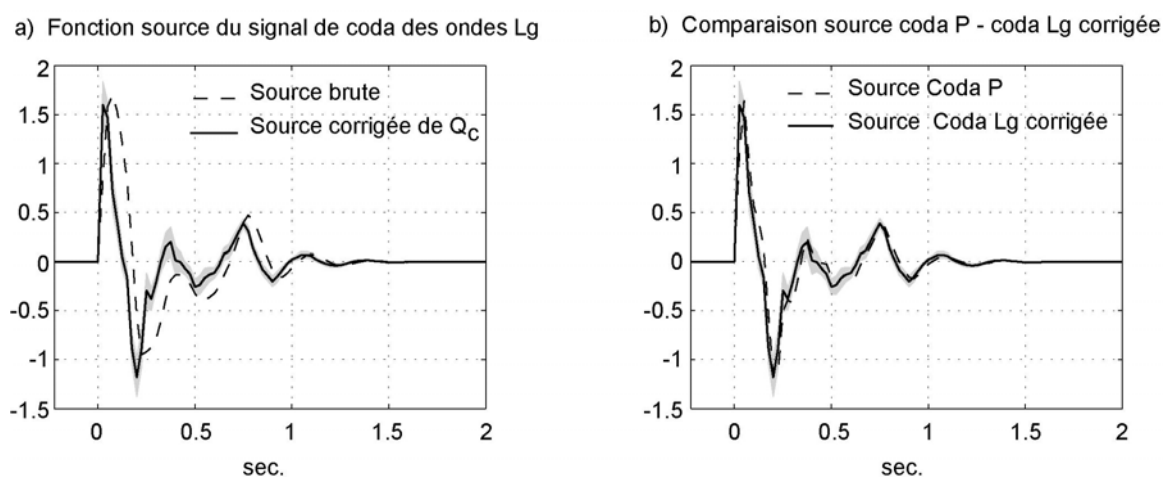


Figure III-25 : Fonction source obtenue sur la coda des ondes Lg en utilisant une fenêtre d'apodisation de Parzen d'une durée de 4s.

Si l'on compare l'ondelette source corrigée de Q_c avec celle obtenue directement sans correction (Figure III-14), on remarque que la correction de l'atténuation de coda a permis de révéler le caractère très impulsif du pulse d'explosion. Ainsi, le pulse de l'onde de choc est, après correction, beaucoup plus impulsif que le pulse associé à la première oscillation de bulle (Figure III-25-a). D'autre part, on est maintenant en mesure d'identifier précisément les

réverbérations multiples à l'intérieur de la mer. Par ailleurs, comme on peut le voir sur la Figure III-25-b, on retrouve une forme d'onde similaire à celle obtenue sur la coda des ondes P, avec tout de même un léger déphasage retard pour l'ondelette estimée sur la coda des ondes P (sans correction).

Maintenant que l'on a identifié une ondelette source ayant un comportement général très similaire à celui d'une explosion sous-marine, nous allons tenter d'estimer le mouvement d'oscillation de la bulle en supprimant les réflexions multiples à l'intérieur de la mer. Notre objectif final est d'estimer le rapport d'amplitude des pulses de l'onde de choc et de l'effet de bulle afin de pouvoir vérifier a posteriori le caractère phase minimale de la dérivée seconde du volume de la bulle.

Cependant, si l'on s'intéresse à l'évolution temporelle de l'amplitude de l'ondelette estimée, nous devons nous intéresser à un point que nous n'avons pas encore abordé : l'effet de la fenêtre d'apodisation de la fonction d'autocorrélation. Comme nous l'avons déjà dit, son rôle est de lisser le spectre afin d'éliminer toutes les variations brutales liées au caractère aléatoire du signal de coda et de ne retenir que le comportement général lié à la fonction source du mouvement sismique. Par définition, l'opération d'apodisation de la fonction d'autocorrélation donne un poids plus important aux valeurs de la fonction d'autocorrélation associées à des retards faibles qu'à celles associées à des retards plus élevés. Comme nous l'avons vu, cela nous permet de réduire la variance de l'estimation spectrale associée à cette fonction d'autocorrélation (paragraphe II.3.2.4). Néanmoins, cette apodisation, en déformant l'amplitude de la fonction d'autocorrélation, déforme aussi celle de l'ondelette phase minimale qui lui est associée. Ainsi, afin d'un peu mieux appréhender son rôle et d'en réduire les effets sur la forme de l'ondelette source de l'explosion du Kursk, nous avons refait nos calculs en utilisant comme fonction d'apodisation une porte de longueur 4s. Comme on peut le voir sur la Figure III-26-c, l'absence d'apodisation amplifie très nettement le pulse d'oscillation de bulle (d'un facteur d'environ 1.75), ainsi que les oscillations résiduelles post effet de bulle. Néanmoins, la forme générale, le caractère impulsif de l'onde de choc, et l'effet des réverbérations multiples sont conservées.

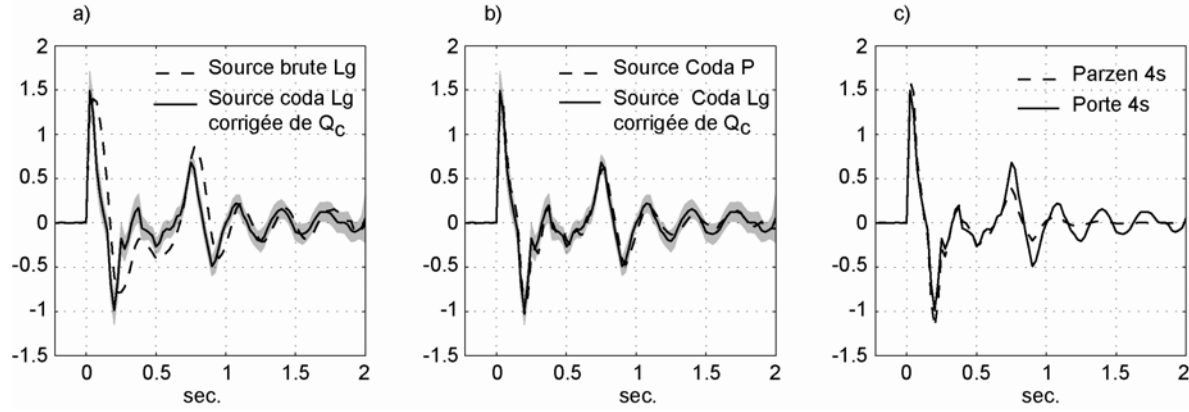


Figure III-26 : Fonction source obtenue sur la coda des ondes Lg en utilisant une fenêtre d'apodisation naturelle (fonction porte) d'une durée de 4s, a) Comparaison de la fonction source du signal de coda des ondes Lg avec ou sans correction de Q_{coda} , b) Comparaison des ondelettes sources de la coda P et de la coda Lg corrigée, c) Comparaison de l'effet des fenêtres d'apodisation.

Par conséquent si l'on veut correctement estimer l'amplitude du second pulse de pression il faudra plutôt utiliser une fonction porte comme fonction d'apodisation. Néanmoins, il faudra veiller à ce que le contenu haute fréquence (bande coupée) ne soit pas trop biaisé par l'effet des lobes secondaires du spectre de la fonction porte.

III.8 Estimation de la fonction source associée aux variations du volume de la bulle $\dot{V}(t)$

III.8.1 Profondeur de l'explosion

Notre objectif est d'estimer le filtre inverse des réflexions multiples à l'intérieur de la mer. Or une expression de sa transformée en z s'obtient simplement en inversant l'équation (III-15). Ainsi en négligeant le terme de décalage $z^{-k_2/2}$ et le facteur multiplicatif $(1+R)$, la transformée en z , $H_D(z)$, du filtre de déréverbération s'exprime de la façon suivante :

$$H_D(z) = \frac{(1 + RSz^{-(k_1+k_2)})}{(1 - Sz^{-k_1})} \quad (\text{III-38})$$

Pour complètement définir ce filtre, il nous faut déterminer les valeurs de R , S , k_1 et k_2 correspondant respectivement aux coefficients de réflexion sur le fond et sur la surface de la mer, ainsi qu'au temps de propagation de l'onde pour atteindre la surface et le fond de l'eau, en nombre d'échantillons. En ce qui concerne les coefficients de réflexion R et S , nous allons utiliser les valeurs données par (Wielandt, 1975), à savoir $R=0.45$ et $S=0.5$.

k_1 et k_2 peuvent être estimés à partir des temps d'arrivée des pulses associés aux réflexions multiples à l'intérieur de la mer. En effet, comme nous le montre l'équation (III-15), « l'onde de choc » et la première réflexion sur la surface de la mer sont séparées de $k_1 T_e$ secondes tandis que les réflexions multiples surface-fond ont une périodicité de $(k_1+k_2)T_e$ secondes. Or,

comme on peut l'observer sur l'ondelette source (Figure III-27), il n'y a pas de différences entre la périodicité des réflexions surface-fond et le temps séparant l'onde de choc de sa première réflexion sur la surface de la mer. L'explosion a donc eu lieu au fond de la mer, lequel se trouve donc à une profondeur de $h=124\pm 15\text{m}$ puisque $k_1 T_e=0.165\pm 0.01\text{s}$.

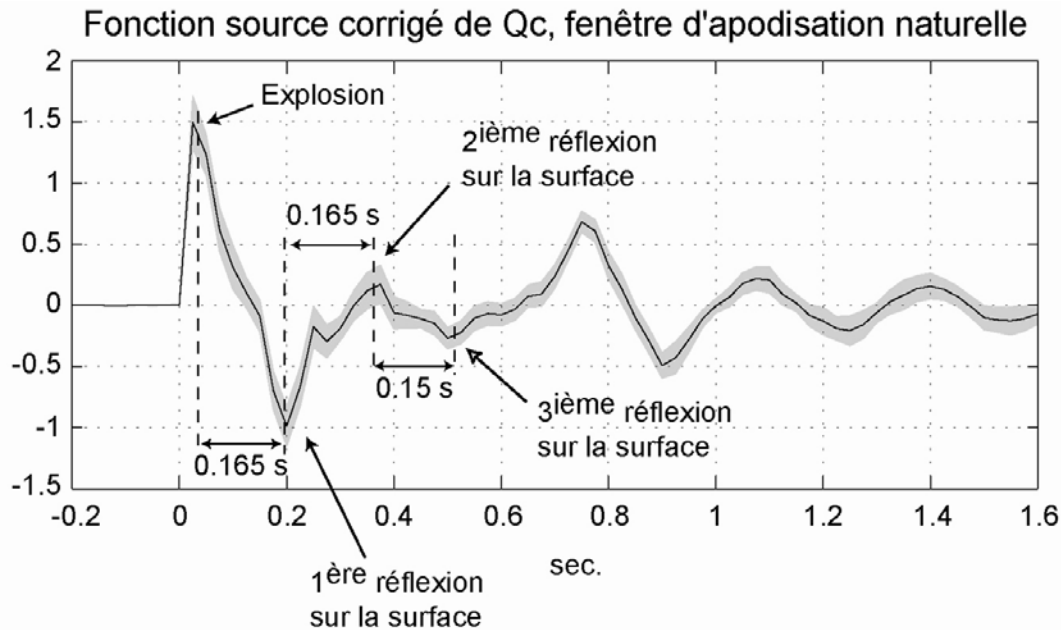


Figure III-27 : Périodicité de la réverbération à l'intérieur de la mer.

III.8.2 Déréverbération de l'ondelette source

L'application du filtre de déréverbération à l'ondelette source, estimée après correction de Q_{coda} et apodisation par une porte de durée 2s, nous fournit une estimation de l'onde de pression générée par le mouvement de la bulle $\ddot{V}(t)$ (Figure III-28). Comme on peut le voir sur la Figure III-28-a, l'ondelette obtenue montre très clairement deux pulses : le premier correspondant à l'onde de choc et le second à l'effet de bulle. La période d'oscillation de la bulle est de l'ordre de $0.72 \pm 0.01\text{s}$. En ce qui concerne l'amplitude relative du pulse d'effet de bulle comparé à celui de l'onde de choc, celle-ci est de l'ordre de 0.4. Ainsi d'après la Figure III-5 d), nous pouvons estimer le rapport d'amplitude de l'onde de pression initiale à phase non minimale. On obtient donc une valeur légèrement inférieure à 0.5. Ainsi, l'ondelette est quasiment à phase minimale puisque l'erreur normalisée maximale correspondante est inférieure à 20% (Figure III-5 a) b). Nous avons ainsi validé a posteriori notre hypothèse de phase minimale sur l'ondelette source.

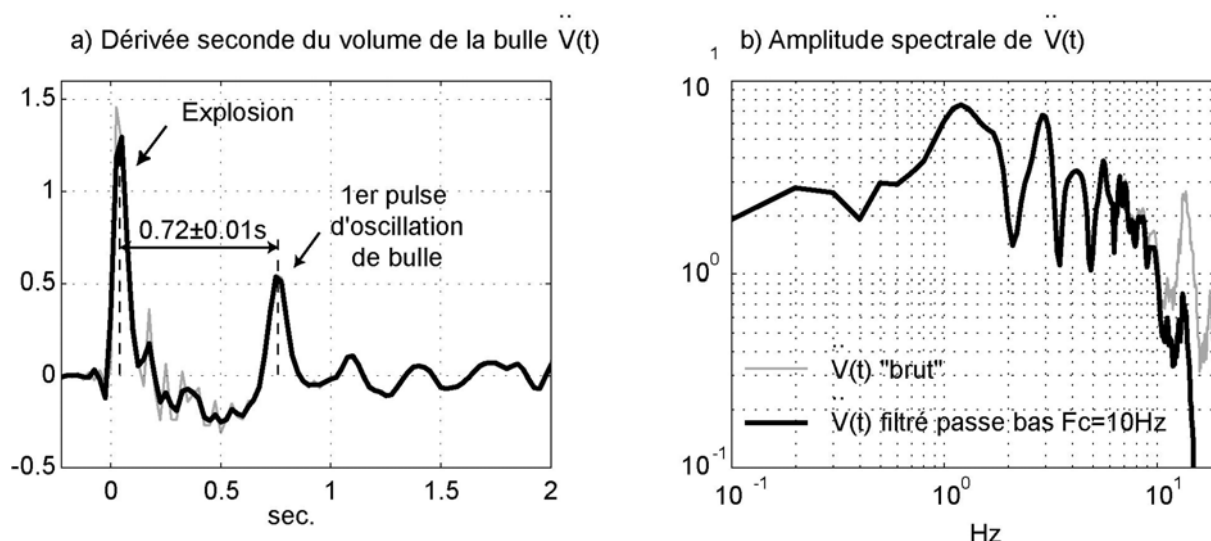


Figure III-28 : Ondulette de pression générée par l'explosion du Kursk.

Par ailleurs, l'ondelette brute obtenue après déréverbération présente des oscillations hautes fréquences juste après l'explosion (Figure III-28-a), très probablement associées au pic fréquentiel situé à environ 13.5Hz (Figure III-28-b). Il est difficile de savoir si ce pic est un signal physique ou si il est simplement du bruit qui a été amplifié par l'opération de déréverbération. N'ayant pour l'instant pas d'explication physique à ce signal, nous l'avons supprimé par filtrage passe-bas, type butterworth à phase nulle. L'opération de filtrage met en évidence un deuxième pulse de très faible amplitude, située 0.31 ± 0.01 s juste après l'onde de choc, proche de l'instant où la bulle atteint son volume maximum. On observe d'ailleurs le même phénomène juste après le premier effet de bulle (Figure III-29), lequel serait toujours situé au moment où la bulle atteint son volume maximum, si on considère que le deuxième pulse de bulle survient à 1.4 ± 0.01 s. Cependant, il est difficile de distinguer le bruit du signal pour des amplitudes aussi faibles, et ce que l'on considère comme le deuxième pulse d'oscillation de bulle, peut très bien être seulement une oscillation résiduelle de la fonction d'autocorrélation. D'autre part, nous n'avons pas encore donné de signification physique aux d'échos à 0.31s et 1.05s, d'autant plus que là aussi, le rapport signal sur bruit n'est pas assez fort pour être sûr de leur existence.

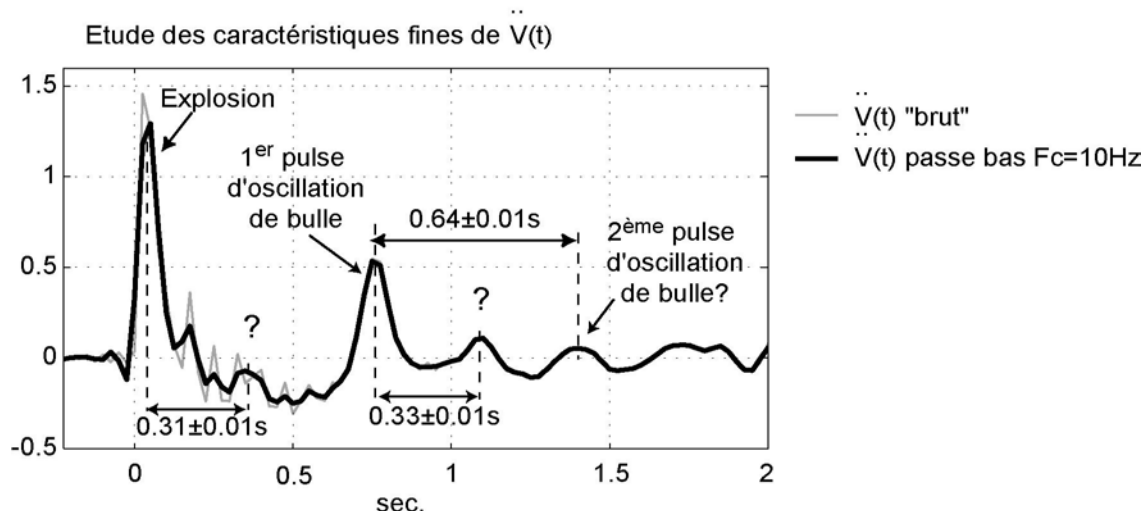


Figure III-29 : Ondelette de pression générée par l'explosion sous-marine à la loupe.

III.9 Estimation de la charge de l'explosion

Comme nous l'avons vu la période d'oscillation de la bulle est directement reliée, par la formule de Willis (III-5), à la quantité d'explosifs mise en jeu lors de l'explosion.

L'ondelette que nous avons estimée (Figure III-28) nous donne une période d'oscillation de l'ordre de 0.72 ± 0.01 s. En utilisant l'estimation précédente de la profondeur de l'explosion d'environ $h = 124 \pm 15$ m, la formule de Willis nous donne une charge de l'ordre de 8377 ± 2880 Kg d'équivalent TNT. Cependant cette charge est bien supérieure à celle déjà fournie par Koper et al. (2001), et Savage et Helmberger (2001), de l'ordre de 4000kg à partir de considération énergétique relative à l'amplitude des ondes. Néanmoins comme nous le dit Cole 1948, la période d'oscillation de la bulle est modifiée par la proximité d'une interface comme le fond ou la surface de l'eau. En effet, la proximité d'une interface modifie l'écoulement de l'eau autour de la bulle et donc sa dynamique. Par exemple, pour une bulle proche de la surface, la quantité de fluide au dessus de la bulle étant moins importante que pour une bulle plus en profondeur, la masse de fluide en mouvement et donc les forces d'inertie associées seront plus faibles. La bulle a par conséquent une expansion plus faible entraînant une diminution de la période d'oscillation de la bulle. Par contre pour une bulle située près du fond, la proximité d'une interface rigide produit un phénomène d'interférences²² qui augmente l'inertie du fluide en mouvement et donc la période d'oscillation de la bulle. Sous des hypothèses simplificatrices de faible mouvement vertical de la bulle jusqu'à sa contraction maximale, on obtient la formule analytique suivante de la période d'oscillation de la bulle (Friedman, 1945; Cole, 1948) :

²² Dû au phénomène de Venturi.

$$T = 2.71 \times 10^{-2} \frac{(rQw)^{\frac{1}{3}}}{(z+10)^{\frac{5}{6}}} \left[1 + 9.1 \times 10^{-3} \frac{(rQw)^{\frac{1}{3}} F\left(\frac{z-b}{z+b}\right)}{b(z+10)^{\frac{1}{3}}} \right] \quad (\text{III-39})$$

où z et b sont respectivement la profondeur de la bulle et sa distance par rapport au fond, exprimées toutes deux en mètres, $Q \approx 1.06 \times 10^6$ cal/Kg pour le TNT, et w est la masse d'explosif exprimée comme d'habitude en Kg (équivalent TNT). Le coefficient r représente la perte d'énergie au cours de l'oscillation de la bulle, $r \approx 0.45$ pour la 1^{ère} oscillation. $F(x)$ est une fonction définie par la série infinie :

$$F(x) = (1-x) \left[2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - x^2} - \ln(2) \right] \quad (\text{III-40})$$

pour x appartenant à l'intervalle $]-1,1]$. En appliquant cette formule à la période d'oscillation de la bulle de l'explosion du Kursk, et en considérant que celle-ci a eu lieu à environ 10m au dessus du fond, on obtient une charge d'explosif de l'ordre de 3950Kg de TNT. On retrouve alors une valeur du même ordre de grandeur que celle fournie par Koper et al. (2001), et Savage et Helmberger (2001).

III.10 Stabilité spatiale de l'ondelette source estimée par déconvolution à phase minimale

Nous avons en notre possession d'autres jeux de données de l'explosion du Kursk enregistrées sur le réseau FINESS (Figure III-30) et situées à des distances épacentrales d'environ 1040km.

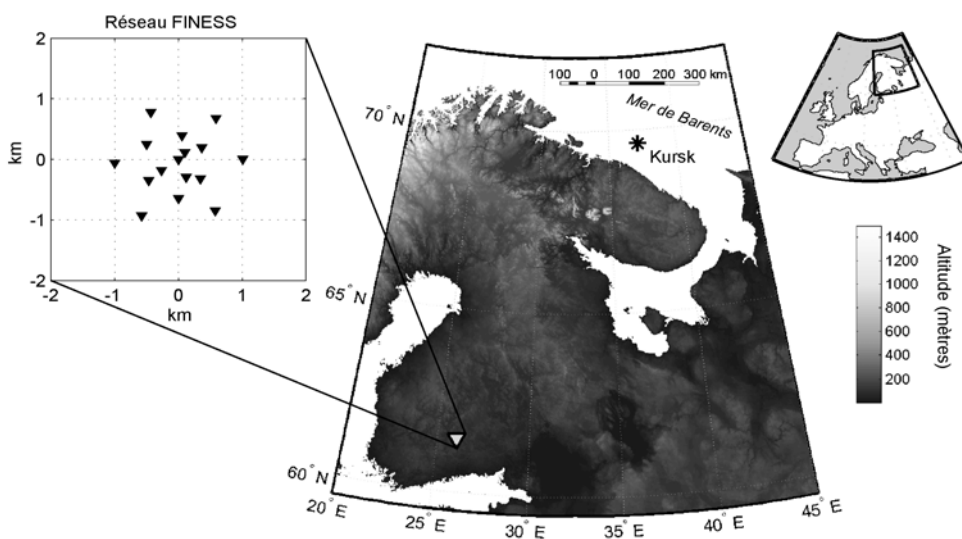


Figure III-30 : Localisation et géométrie du réseau FINESS.

Après correction des réponses de capteur et filtrage passe haut de type butterworth d'ordre 5 de fréquence de coupure de 0.9Hz, nous avons appliqué l'algorithme de déconvolution à phase minimale du paragraphe III.4.2 sur différentes fenêtres de signal : ondes P, coda P, coda P « tardive », ondes S, ondes Lg et coda Lg (Figure III-31).

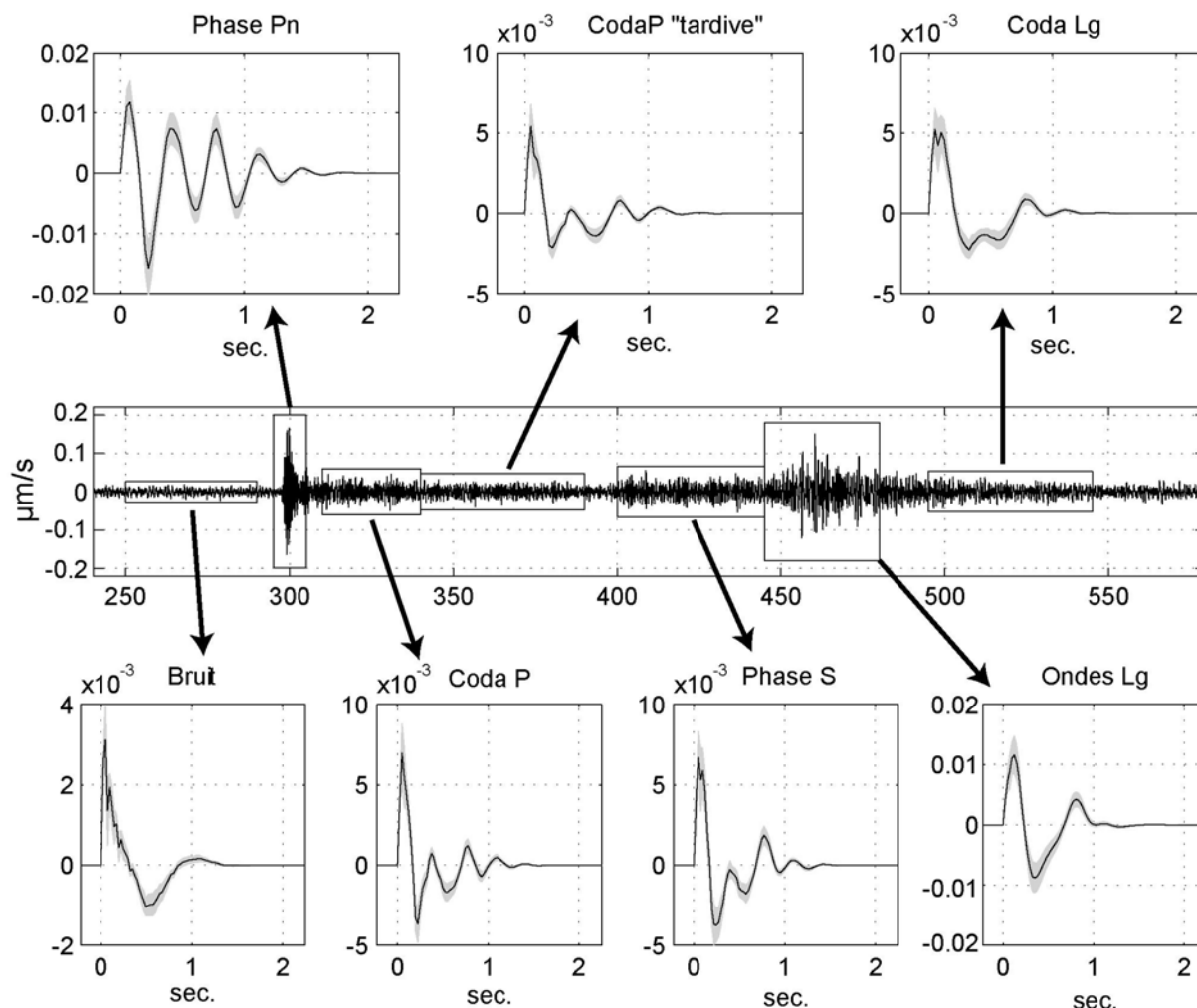


Figure III-31 : Ondelette à phase minimale estimée sur les différentes phases sismiques de l'explosion du Kursk enregistrée au réseau FINSS.

Puisque l'onde associée au premier mouvement (onde P) s'est propagée avec une vitesse de l'ordre de 7.7km/s, il s'agit très probablement d'une onde réfractée Pn. Etant donnée que la phase Pg n'apparaît pas clairement dans les sismogrammes, nous avons défini deux fenêtres de coda des ondes P : une fenêtre « coda P » et une fenêtre « coda P tardive ». De même, comme il est difficile d'identifier clairement les phases Sn et Sg, nous nous sommes contentés de définir une unique fenêtre « onde S ».

Par ordre chronologique, l'ondelette des ondes Pn ne présente pas les caractéristiques fondamentales de la fonction source associée à une explosion sous-marine et il est impossible d'identifier clairement : onde de choc, réverbération et pulse d'oscillation de bulle. Lors de sa

propagation à l'intérieur de la croûte, l'ondelette de la phase P_n a donc acquis une certaine « couleur » qui altère notre estimation de la fonction source. Le terme associé à la propagation des ondes P_n à l'intérieur de la croûte ne peut donc pas être considéré comme un bruit blanc mais un bruit « coloré ». Il est par ailleurs intéressant de remarquer que cette ondelette estimée sur la phase, que nous avons appelée P_n du réseau FINESS, est très similaire à celle obtenue sur la phase P_g du réseau ARCESS, ce qui suggère un mode de propagation similaire, au moins pour ces deux phases. D'autant plus, que même si la première arrivée est bien une onde réfractée sur le Moho, les trains d'ondes plus tardifs qu'englobe la fenêtre « Phase P_n », ont inévitablement subi des réflexions multiples à l'intérieur de la croûte, d'une façon analogue aux ondes des P_g .

La coda de la phase P quant à elle, nous permet d'identifier l'onde de choc et la réverbération à l'intérieur de la mer. En ce qui concerne le pulse d'effet de bulle, son identification est rendue difficile en raison de la présence d'une oscillation négative assez forte autour de 0.55s. Néanmoins, comme nous le montre l'écart-type, l'amplitude de ce pic négatif est définie avec une moins grande précision que le pulse situé autour de 0.7s et qui est très probablement associé à la première contraction de bulle. Ainsi, si il n'y avait pas ce pic négatif autour de 0.55s, l'ondelette de la coda P aurait une forme très proche de celle de la fonction source d'une explosion sous-marine, comme c'était déjà le cas de l'ondelette de coda P sur le réseau ARCESS.

L'ondelette de « coda P tardive » est très similaire à celle de la « coda P », mais en raison de l'atténuation, elle ne montre plus vraiment le caractère impulsif de l'onde de choc ou de sa réverbération à l'intérieur de la mer. Par ailleurs, le caractère piqué du pulse d'onde de choc (Figure III-31) est très probablement causé par le faible rapport signal sur bruit du signal sismique sur la fenêtre de « coda P tardive » (Figure III-32). En effet, de façon similaire au paragraphe III.6.2.2, nous avons calculé et représenté l'évolution temporelle du rapport signal sur bruit (Figure III-32). Comparé aux résultats du réseau ARCESS (Figure III-23), on observe que le rapport signal sur bruit est très nettement plus faible. On n'a d'ailleurs plus aucune information au-delà de 10Hz.

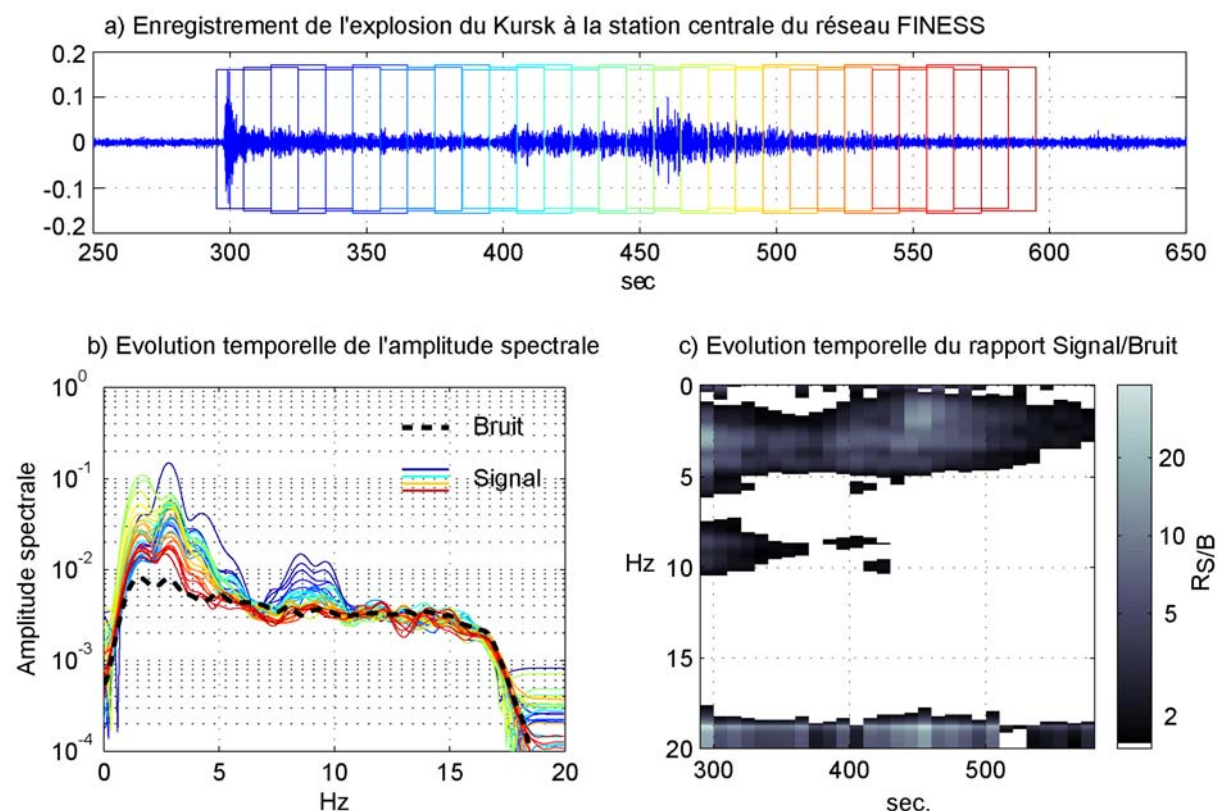


Figure III-32 : Etude de l'évolution temporelle du rapport Signal/Bruit de l'enregistrement de l'explosion du Kursk sur FINISS.

L'ondelette de la phase S est très similaire à celle observée sur le signal de coda des ondes Lg du réseau ARCESS. Tout comme elle, elle présente deux pics positifs bien individualisés correspondant par ordre chronologique à l'onde de choc et au pulse de première contraction de bulle. Le pic négatif correspond très vraisemblablement à la première réflexion sur la surface de la mer. Cependant, on observe un très léger pic haute fréquence au sommet de l'onde de choc, significatif du faible rapport signal sur bruit de nos signaux sur la bande 5-20Hz.

Même si elle présente deux pics positifs pouvant correspondre à l'onde de choc et à la première contraction de bulle, l'ondelette des Lg a une forme très différente de celle de la fonction source d'une explosion sous-marine. On observe donc une ondelette représentative de la couleur associée à la propagation des ondes Lg à l'intérieur de la terre et non uniquement à celle de la source.

L'ondelette associée à la coda des ondes Lg semble correspondre à un mélange de l'ondelette des Lg et de celle du bruit, ce qui n'est pas étonnant vu le très faible rapport signal sur bruit du signal au-delà de 500s.

D'une façon générale, toutes les ondelettes « sources », que nous avons estimées sur les différentes phases sismiques, semblent être altérées par la propagation à l'intérieur de la terre et ne correspondent pas toujours à la forme caractéristique d'une explosion sous-marine. Par contre, il est intéressant de remarquer que certaines d'entre elles, Phase Pn, Coda P et Phase S sont très similaires aux ondelettes sources déjà observées sur certaines phases du réseau ARCESS.

Nous allons essayer de corriger nos ondelettes de l'effet de propagation en utilisant une procédure analogue à celle développée lors de l'étude de la coda des ondes Lg des enregistrements d'ARCESS. En ce qui concerne la coda des ondes Lg des signaux du réseau FINESS, malheureusement en raison du très faible rapport signal sur bruit, appliquer l'algorithme de correction de coda Lg n'aurait que peu d'intérêt. Néanmoins, la similitude de forme entre l'ondelette de la Phase S sur FINESS avec celle obtenue sur la coda des Lg sur ARCESS nous permet de supposer que le processus de création de ces deux trains d'onde est similaire. Nous avons donc tenté de corriger l'effet de propagation observé sur la phase S du signal de FINESS par le filtre d'atténuation $p(t, t_0)$, obtenu par estimation de Q_{coda} sur les signaux du réseau ARCESS. Etant donné que le signal de la phase S est quasiment stationnaire, nous avons utilisé une simple déconvolution par water-level par la réponse impulsionnelle $p(t, t_0)$. t_0 a donc été choisi égal au temps d'arrivée du train d'ondes de la phase S, c'est-à-dire 238s après le temps origine de l'explosion. Nous avons ainsi estimé l'ondelette « source » corrigée de l'effet de propagation $p(t, 400)$ (Figure III-33). Celle-ci présente maintenant onde de choc et pulses de réverbération à l'intérieur de la mer. Le pulse associé à la première contraction de la bulle a une amplitude un peu faible en raison de l'utilisation d'une fenêtre de Parzen.

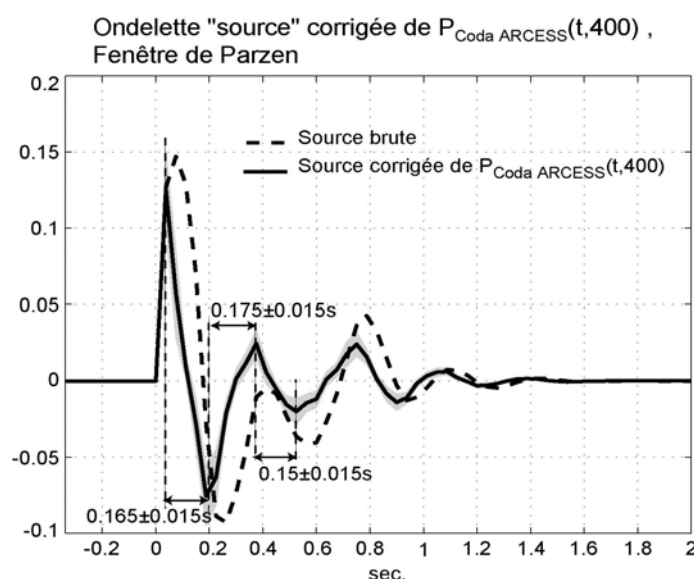


Figure III-33 : Comparaison de l'ondelette source initiale de train d'onde S enregistrée sur FINESS avec l'ondelette obtenue après déconvolution du filtre d'atténuation de coda calculé sur ARCESS.

En effet, comme on peut le voir sur la Figure III-34 a), l'utilisation d'une fenêtre d'apodisation naturelle permet de redonner au pulse d'oscillation de bulle une amplitude plus raisonnable. Afin d'obtenir l'ondelette associée aux variations du volume de la bulle, nous avons appliqué le même filtre de déréverbération que précédemment. L'ondelette retrouvée (Figure III-34 b) est très similaire à celle obtenue sur le réseau ARCESS (Figure III-28 a).

Elle montre tout de même des pulses ou oscillations résiduels, post-effet de bulle, assez importants, auxquels il n'est pas facile de trouver une signification physique (paragraphe III.8.2).

On a donc montré que l'enregistrement situé à 1040km de distance épacentrale, nous fournit une ondelette « source » identique à celle obtenue sur le réseau ARCESS situé seulement à 541km de distance épacentrale. La similitude des ondelettes obtenues sur des réseaux à des distances épacentrales et des azimuts complètement différents, nous prouve la stabilité de la méthode que nous avons développée et confirme, d'une certaine façon, que nous estimons bien la fonction source du mouvement sismique.

Par ailleurs, on a obtenu de bons résultats en appliquant au train d'ondes S de FINESS une correction utilisant le filtre d'atténuation estimé sur la coda Lg d'ARCESS. Il en résulte que d'une certaine façon, le régime propagatif de ces deux trains d'ondes est similaire, au moins du point de vue de l'atténuation.

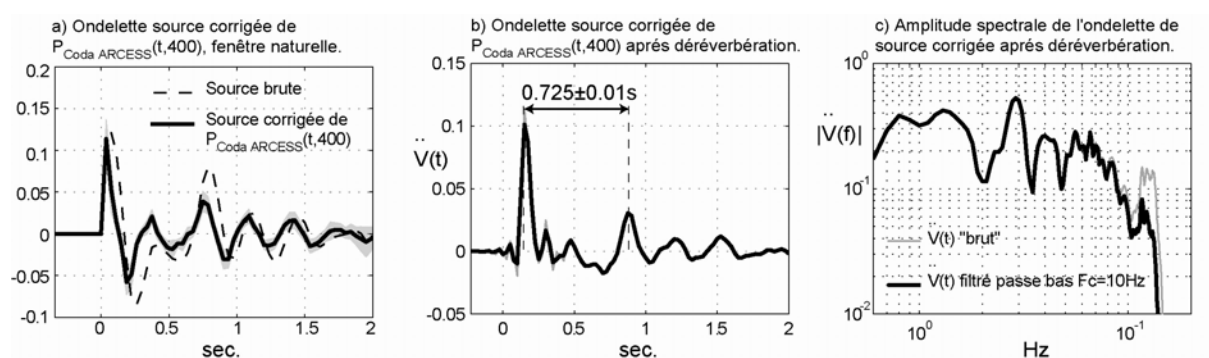


Figure III-34 : Déréverbération de l'ondelette source du train d'ondes S enregistré sur FINESS.

III.11 Conclusion

L'objet de ce chapitre était de voir dans quelle mesure la déconvolution à phase minimale était susceptible de nous fournir la fonction source du mouvement sismique. Nous avons choisi de tester cette méthode sur des enregistrements sismiques générés par une explosion sous-marine du Kursk pour deux raisons. D'une part, la source associée à une explosion sous-marine a une forme très caractéristique qu'il nous est facile d'identifier. D'autre part, nous avons montré que la fonction source d'une explosion sous-marine peut être considérée, sous certaines conditions, comme étant à phase minimale.

Les autres hypothèses que doit vérifier le signal aléatoire générateur, ici la fonction de Green, sont sa stationnarité et sa blancheur. La non-stationnarité du signal sismique nous a donc contraint à appliquer la déconvolution à phase minimale sur des plages de durée limitée de signal correspond aux différentes phases sismiques d'un sismogramme régional : Pn, Pg, coda P, Sn, Sg, Lg, coda Lg. Ainsi, à part l'ondelette estimée sur la coda du train d'ondes P, l'ensemble des ondelettes des autres phases sismiques présente un effet de propagation plus ou moins marqué rendant parfois impossible l'identification des caractéristiques principales d'une explosion sous-marine, comme pour la phase Pg sur ARCESS ou P sur FINESS.

La qualité de l'ondelette estimée sur la coda des ondes P est très vraisemblablement associée au caractère aléatoire intrinsèque de ce signal, engendré par diffraction multiple du champ d'ondes sismiques sur toutes les hétérogénéités du milieu. Cependant, suivant la distance épacentrale des enregistrements, notamment lorsque l'on est plus proche de la source, la coda des ondes P n'est pas toujours clairement définie. Il nous serait alors impossible de déterminer la fonction source. Cependant, un autre type d'onde, même si son contenu spectral est altéré par sa propagation à l'intérieur de la terre, est par nature aléatoire : la coda des ondes Lg. En utilisant la théorie des ondes de coda initiée par Aki (1969) et Aki et Chouet (1975), nous avons estimé l'effet de la propagation à l'intérieur de la terre sur ce champ d'ondes sismiques,

notamment en estimant Q_{coda} . Ainsi, la correction du terme d'atténuation du champ d'onde de coda, par déconvolution non stationnaire, nous a permis de corriger l'ondelette source de la coda L_g et de trouver ainsi une ondelette très similaire à celle déjà obtenue sur la coda des ondes P . La période d'oscillation de la bulle a été mise en évidence par déréverbération de l'ondelette source, nous permettant d'estimer successivement profondeur et charge de l'explosion.

Enfin les résultats similaires obtenus sur le réseau FINESS confirment que la déconvolution à phase minimale nous permet bien d'accéder à la fonction source d'une explosion sous-marine. D'autre part, ces résultats nous montrent que la méthode est en quelque sorte capable d'individualiser des régimes propagatifs : ondes P , Coda P , Coda S .

Une piste d'investigation future serait de voir dans quelle mesure le terme de propagation associé, par exemple à l'ondelettes de la phase P , est engendré par la structure de la croûte de cette région. Il nous reste bien sûr à appliquer cette méthode à d'autres types de sources sismiques : Séisme, explosion terrestre, etc... Néanmoins le caractère « non phase minimale » de la fonction source associée à un tremblement de terre nécessitera l'utilisation de méthodes de déconvolution sensibles à la phase comme par exemple la déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur.

Chapitre IV Estimation de la fonction source du séisme de Rambervillers par déconvolution à phase minimale

IV.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est double. Le premier est de déterminer dans quelle mesure nous sommes capables d'identifier, à partir d'un seul enregistrement à distance régionale, la fonction source temporelle du mouvement sismique, sans aucune connaissance a priori sur le terme de propagation, tant en terme d'atténuation qu'en terme de complexité de la propagation à l'intérieur de la croûte terrestre. Ainsi, dans un premier temps, avant d'appliquer les algorithmes de déconvolution aveugle proprement dits (qui feront d'ailleurs l'objet du Chapitre 5), nous avons appliqué aux enregistrements du Séisme de Rambervillers (22 février 2003) un algorithme de déconvolution « semi-aveugle » à phase minimale similaire à celui que nous avons utilisé pour le Kursk.

Le second objectif de ce chapitre est de tenter d'extraire d'éventuels effets de site des ondelettes sources estimées par déconvolution à phase minimale notamment en utilisant une méthode du type rapport spectral site/référence.

Ainsi, après avoir rappelé les conditions de validité et les caractéristiques du modèle convolutif en sismologie, nous avons cherché à savoir dans quelle mesure la fonction source du mouvement sismique peut être considérée comme une ondelette à phase minimale. Nous avons ensuite adapté notre algorithme de déconvolution à phase minimale du signal de coda afin qu'il nous permette d'estimer le moment sismique. Nous avons enfin estimé la fonction source à phase minimale du séisme de Saint-Dié en utilisant un algorithme basé, soit sur un modèle en simple scattering, soit sur un modèle diffusif.

IV.2 Quelques rappels de sismologie

Ce premier paragraphe va nous permettre de rappeler les conditions suivant lesquelles le champ d'ondes sismiques peut s'exprimer sous la forme d'une équation de convolution. Il

nous permettra d'introduire la notion de fonction source du mouvement sismique et celle de fonction de Green.

IV.2.1 Le champ d'ondes élastiques créé par une dislocation

La formule générale permettant d'exprimer le champ d'onde rayonné par une rupture sur une faille à l'intérieur d'un milieu élastique est obtenue à partir du théorème de « représentation ». Ainsi, en négligeant les forces de volume et les discontinuités de contrainte, le champ de déplacement u_i à un instant t et en tout point \mathbf{x} du milieu élastique peut se mettre sous la forme suivante (Aki et Richards, 1980) :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{\Sigma} [u_j(\xi, \tau)] c_{jkpq} G_{ip,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) \nu_k d\Sigma(\xi) \quad (IV-1)$$

Les différents termes de cette équation représentent respectivement :

- $u_i(\mathbf{x}, t)$ la $i^{\text{ème}}$ composante du mouvement du sol enregistré en \mathbf{x} à l'instant t .
- $[u_j(\xi, \tau)] = u_j(\xi, \tau)|_{\Sigma^+} - u_j(\xi, \tau)|_{\Sigma^-}$ la dislocation (c'est-à-dire la discontinuité de déplacement) de part et d'autre du plan de faille Σ de vecteur normal ν .
- c_{jkpq} le tenseur des constantes élastiques permettant de décrire la relation contraintes-déformations grâce à la loi de Hooke :

$$\sigma_{jk} = C_{jkpq} \varepsilon_{pq} \quad (IV-2)$$

où σ_{jk} et ε_{pq} représentent respectivement le tenseur des contraintes et celui des déformations. Notons d'autre part que la répétition des indices implique la somme des termes concernés (convention d'Einstein). D'autre part, dans un milieu élastique isotrope homogène, C_{jkpq} est défini par seulement deux paramètres de Lamé λ et μ suivant la relation :

$$c_{jkpq} = \lambda \delta_{jk} \delta_{pq} + \mu (\delta_{jp} \delta_{kq} + \delta_{jq} \delta_{kp}) \quad (IV-3)$$

- $G_{ip}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ est la fonction de Green du milieu correspondant au déplacement dans la direction i créé en \mathbf{x} à l'instant t par une force de direction p appliquée en ξ à l'instant τ .
 - $G_{ip,q}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ représente la dérivée spatiale de $G_{ip}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ par rapport à ξ_q :
- $$\frac{\partial G_{ip}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \xi_q}$$

Localement, la contribution au champ de déplacement u_i , de la dislocation $[u_j(\xi, t)]$ de chaque élément de surface $d\Sigma$ de la faille s'exprime ainsi sous la forme d'une équation de convolution entre l'histoire du glissement sur $d\Sigma$ et la dérivée de la fonction de Green $G_{ip,q}(x, t; \xi, \tau)$. Néanmoins, le champ global u_i qui est l'intégrale, ou si on préfère, la somme de toutes ces contributions élémentaires sur l'ensemble de la faille, ne pourra pas être considéré comme une simple équation de convolution. En effet, la fonction de Green ainsi que le glissement sur la faille étant variables d'un point à l'autre de la faille, il est a priori impossible de factoriser l'un de ces deux termes de manière à « le sortir de sous l'intégrale ».

Cependant, nous allons voir que sous certaines hypothèses ou approximations, on peut néanmoins factoriser cette équation, qui s'exprime alors sous la forme d'un produit de convolution entre un terme de source et un terme de propagation.

IV.2.2 Le champ d'ondes élastiques créé par un séisme en champ lointain

IV.2.2.1 Le cas du milieu élastique homogène isotrope

Dans un premier temps nous allons nous intéresser au cas d'un milieu élastique homogène, infini et isotrope. Pour un tel milieu la fonction de Green est de la forme suivante :

$$G_{ip}(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi\rho r^3} (3\gamma_i\gamma_p - \delta_{ip}) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' \delta(t - \tau - t') dt' + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r} \gamma_i\gamma_p \delta\left(t - \tau - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r} (\gamma_i\gamma_p - \delta_{ip}) \delta\left(t - \tau - \frac{r}{\beta}\right) \quad (IV-4)$$

où γ est le vecteur unitaire entre le point source ξ et la position x du récepteur, $r=|x-\xi|$ est la distance entre ces deux points, enfin α et β sont respectivement les vitesses des ondes P et des ondes S dans le milieu.

Ainsi comme nous le montre l'équation (IV-4), la fonction de Green est composée de 3 termes, qui sont de haut en bas : un terme de champ proche, un terme d'onde P et un terme correspondant au train d'ondes S.

En **champ lointain**, c'est-à-dire lorsque la distance source-récepteur est plusieurs fois supérieure à la plus grande longueur d'onde étudiée²³ :

$$R \gg \lambda \quad (IV-5)$$

il ne subsiste seulement que les termes de champ lointain, le terme de champ proche de la fonction de Green est négligeable.

Toujours dans le but d'obtenir une relation entre le mouvement sur la faille et celui observé en x , on suppose l'hypothèse de « **source lointaine** » vérifiée :

$$r \gg L \quad (IV-6)$$

où L représente la longueur caractéristique de la faille. Dans ce cas, la station d'enregistrement est suffisamment éloignée de la source, pour que la distance r et le vecteur directeur γ soient pratiquement constants sur l'ensemble de la faille. Ces termes, qui varient alors très lentement sur l'ensemble de la faille, pourront être sortis de l'intégrale de l'équation (IV-1).

Enfin, une dernière hypothèse est de considérer que la faille est quasi-plane et que la direction du glissement est la même en chaque point de la faille. La discontinuité de déplacement de part et d'autre de la faille peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$[u_j(\xi, t)] = n_j \cdot \Delta u(\xi, t) \quad (IV-7)$$

où Δu est une fonction scalaire appelée fonction de glissement lorsqu'elle traduit le déplacement sur une faille en cisaillement.

Ainsi, après avoir remplacé dans (IV-1) l'expression de la fonction de Green (IV-4), en se plaçant en champ et source lointains et en considérant un déplacement unidirectionnel, le mouvement du sol en x est de la forme suivante (pour un développement plus complet, chapitre 10 du Aki and Richards 2002, seconde édition) :

$$\begin{aligned} u_i(x, t) = & \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r_0} c_{jkpq} \gamma_i \gamma_p \gamma_q v_k n_j \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u} \left(\xi, t - \frac{r}{\alpha} \right) d\Sigma \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3 r_0} c_{jkpq} (\delta_{ip} - \gamma_i \gamma_p) \gamma_q v_k n_j \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u} \left(\xi, t - \frac{r}{\beta} \right) d\Sigma \end{aligned} \quad (IV-8)$$

où r_0 représente la distance entre le site d'enregistrement situé en x et un point de référence sur la faille (Figure IV-1), comme par exemple l'hypocentre.

²³ Une preuve de cette inégalité est obtenue en effectuant la Transformée de Fourier de l'équation (IV-1) dans laquelle on a remplacé le terme de Green par sa valeur (IV-4) (Chapitre 4 Aki, K. and P. G. Richards, (1980). *Quantitative seismology; theory and methods*. New York, W. H. Freeman and Company.)

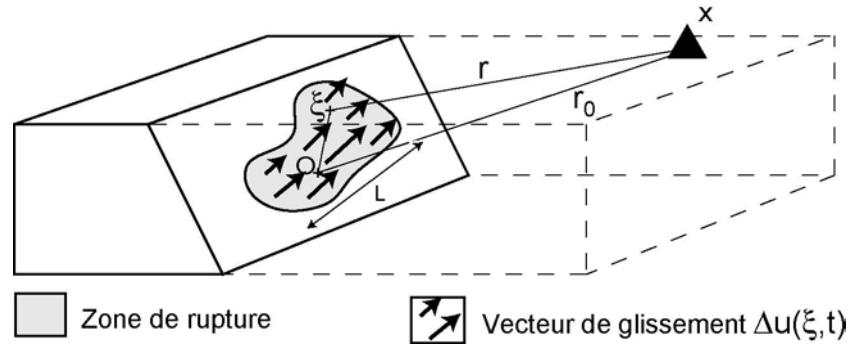


Figure IV-1 : Modèle simplifié d'une rupture sismique.

En introduisant la loi de Hooke dans l'équation précédente (IV-8), celle-ci peut se mettre sous une forme plus compacte :

$$u_i^{PouS}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho c^3 r_0} \mathfrak{R}_i^{PouS} S(\mathbf{x}, t) \quad (\text{IV-9})$$

où c représente la célérité du type d'onde considérée : α pour les ondes P et β pour les ondes S. Cette formulation permet de séparer deux quantités fondamentales pour le sismologue : un terme scalaire $S(\mathbf{x}, t)$ appelé **fonction source** du mouvement sismique et un terme vectoriel \mathfrak{R}_i^{PouS} appelée au **diagramme de radiation** des ondes S ou P. Ce dernier est un terme de modulation de l'amplitude du champ d'ondes rayonné par la rupture en fonction de l'orientation relative de la source sismique et du récepteur. Suivant le type d'onde considérée on aura :

$$\mathfrak{R}_i^P = 2\gamma_i \gamma_p n_p \gamma_q \nu_q \quad ; \quad \mathfrak{R}_i^S = (n_i \gamma_q \nu_q + \nu_i \gamma_q n_q - 2\gamma_i \gamma_p n_p \gamma_q \nu_q) \quad (\text{IV-10})$$

En coordonnées sphériques où $\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$, $\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$, les coefficients de radiation d'une faille telle que $\nu = (1, 0, 0)$ et $n = (0, 1, 0)$, prennent une forme beaucoup plus explicite (Figure IV-2) :

$$\mathfrak{R}^P = \sin^2 \theta \cos 2\phi \mathbf{e}_r \quad ; \quad \mathfrak{R}^S = \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\phi \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \cos 2\phi \mathbf{e}_\phi \quad (\text{IV-11})$$

Tout d'abord, ces coefficients de radiation nous montrent que les différents types d'ondes ont des polarisations différentes : les ondes P sont caractérisées par un mouvement particulière radial, tandis que le train d'ondes S crée un mouvement particulière transverse à la direction source/récepteur. D'autre part, comme on peut le voir sur la (Figure IV-2), l'énergie libérée par une rupture sismique n'est pas rayonnée de manière isotrope dans le milieu contrairement à une source explosive.

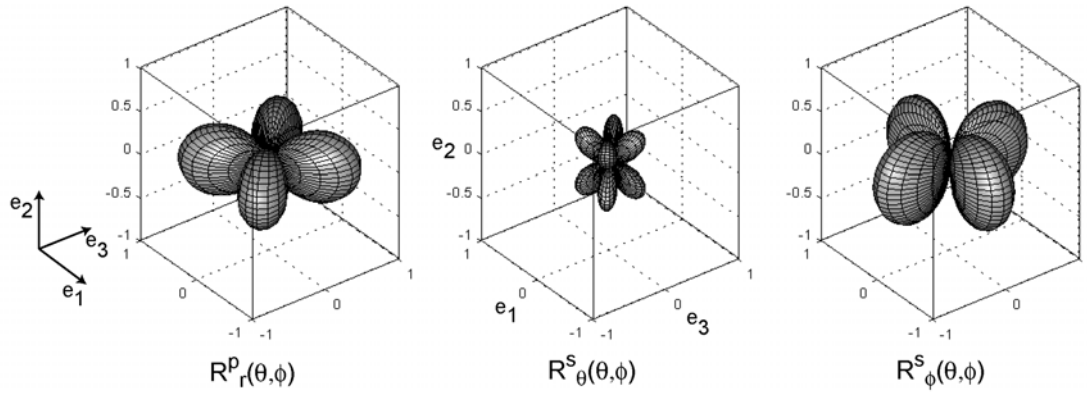


Figure IV-2 : Diagrammes de radiation d'une dislocation décrochante située dans le plan vertical (e_1, e_2).
La **fonction source** $S(\mathbf{x}, t)$ représente la forme d'onde génératrice du mouvement sismique en champ lointain. Elle correspond à l'intégrale sur la faille Σ de l'évolution spatio-temporelle de la vitesse de glissement :

$$S(\mathbf{r}_0, t) = \iint_{\Sigma} \mu(\xi) \Delta u \left(\xi, t - \frac{|\mathbf{r}_0 - \xi|}{c} \right) d\Sigma(\xi) \quad (\text{IV-12})$$

Comme nous le montre (IV-12), la fonction source ne consiste pas uniquement en une intégration de l'évolution spatiale de la vitesse de glissement sur la faille mais elle fait aussi intervenir les caractéristiques temporelles de cette vitesse de glissement. La forme de la fonction source dépendra donc de la géométrie de la faille, ainsi que des caractéristiques de propagation de la rupture.

Néanmoins quelle que soit la complexité de l'histoire spatio-temporelle de la vitesse de glissement sur la faille, le comportement basse fréquence de la fonction source tend vers une constante : le moment sismique M_0 . Cette limite BF du spectre de la fonction source est une quantité fondamentale pour le sismologue puisqu'elle lui permet de quantifier l'énergie libérée par le séisme. Le moment sismique se définit de la façon suivante :

$$M_0 = \int_0^{+\infty} dt \iint_{\Sigma} \mu(\xi) \Delta u(\xi, t) d\Sigma(\xi) \quad (\text{IV-13})$$

Dans un milieu homogène (μ constant), le moment sismique s'exprime directement en fonction du glissement moyen D sur la faille :

$$M_0 = \mu D A \quad (\text{IV-14})$$

avec

$$D = \frac{1}{A} \iint_{\Sigma} \Delta u(\xi, t \rightarrow \infty) d\Sigma(\xi) \quad (\text{IV-15})$$

où A représente l'aire de la zone de rupture. D'un point de vue unité, le moment sismique²⁴ s'exprime en N.m.

Nous venons donc de voir que dans un milieu homogène le mouvement sismique en champ lointain est composé de deux termes : un terme de propagation et un terme de source qui consiste simplement en une fonction scalaire du temps. Nous allons étudier le cas plus général d'un milieu hétérogène, ce qui va nous permettre de définir la notion de fonction de Green empirique.

IV.2.2.2 Cas d'un milieu hétérogène.

2.2.2.1 L'équation de convolution en sismologie.

D'une façon générale, sous des hypothèses de champ lointain et de source lointaine, on a donc montré que le champ d'ondes sismiques enregistré par un sismomètre en champ lointain, s'exprime comme la convolution entre une fonction source du mouvement sismique scalaire $S(\xi, t)$, une fonction vectorielle $G_i(t; \xi, x)$ et la réponse impulsionnelle $I(t)$ du sismomètre :

$$u_i(x, t) = S(\xi, t) * G_i(t; \xi, x) * I(t) \quad (\text{IV-16})$$

où $*$ représente la convolution temporelle.

Le terme $G_i(t; \xi, x)$, appelé fonction de Green, représente la réponse du milieu à une source impulsionnelle placée en ξ . Il est souvent séparé en deux termes (Figure IV-3) : un terme lié à la propagation à grande échelle dans la terre $P_i(t; \xi, x)$ et un terme d'effet de site $H_i(t)$ représentant la réponse sismique des structures géologiques locales sous la station d'enregistrement :

$$u(t) = S(t) * P(t) * H(t) * I(t) \quad (\text{IV-17})$$

A distance régionale, le terme de propagation $P(t)$ représente toute la complexité du champ d'onde sismique à l'intérieur de la croûte. D'une certaine façon, il peut être vu comme la superposition d'un champ d'ondes déterministe (modélisable), associé aux différentes phases sismiques P_g , S_g , L_g ,... et d'un champ d'ondes aléatoire²⁵, constitué des réflexions,

²⁴ Les anglo-saxons utilisent plutôt le dyne.cm ($1 \text{ dyne.cm} = 10^{-7} \text{ N.m}$), où le dyne est une unité de force telle que $1 \text{ dyne} = 10^{-5} \text{ Newton}$.

²⁵ On entend par « aléatoire » la partie du champ d'ondes sismiques qu'il nous est impossible de modéliser, donc de prédire, correctement sans une connaissance fine du milieu. En toute rigueur, il s'agit aussi d'un champ déterministe dans le sens que si on se place dans les mêmes conditions de position et géométrie de la source, de structure du milieu et de position du récepteur, on aura exactement les mêmes enregistrements sismiques.

réfractions sur toutes les hétérogénéités du milieu : le champ d'ondes de coda. Le champ d'onde associé aux différentes phases sismiques est dit déterministe car on peut, lorsque la structure du milieu de propagation est connue, estimer une forme approchée de sa fonction de Green grâce, par exemple, à la méthode des nombres d'onde discrets (Bouchon et Aki, 1977) ou le tracé de rais. Bien qu'il soit en toute rigueur déterministe, le champ d'ondes de coda est dit aléatoire car il n'est pas prédictible. En effet, sa modélisation consisterait à prendre en compte l'effet de toutes les hétérogénéités du milieu grâce par exemple a des méthodes numériques de différences finies ou aux méthodes spectrales. Ainsi, outre des temps de calcul et des moyens informatiques fabuleux, sa modélisation nécessiterait de connaître très finement la structure du milieu de propagation, ce qui est loin d'être le cas dans la réalité.

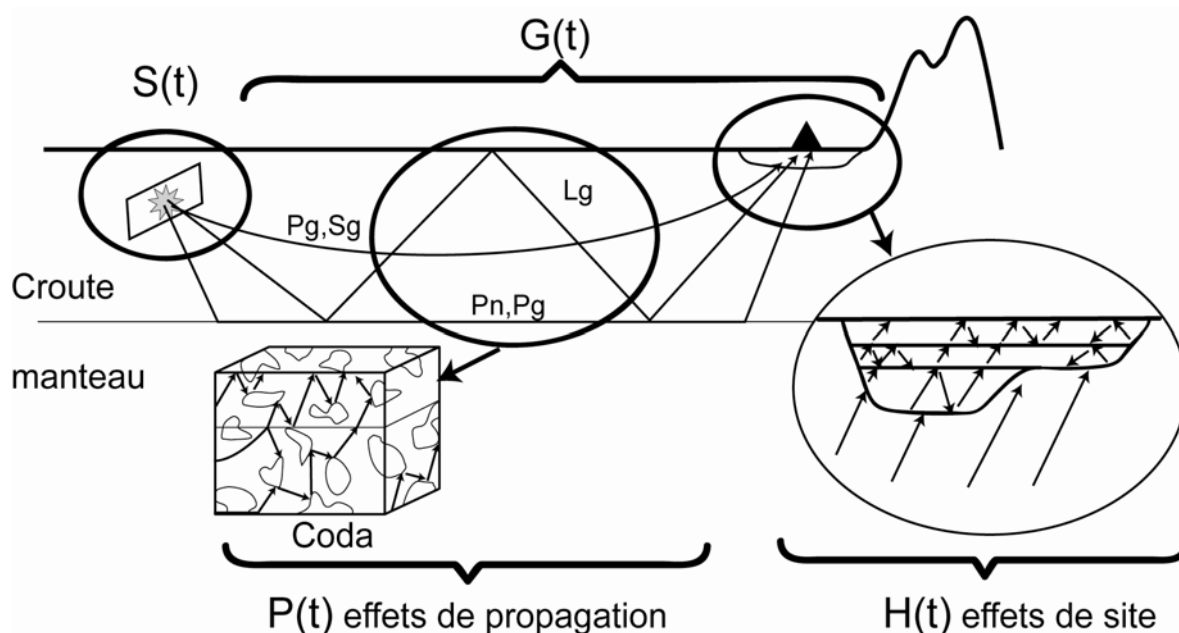


Figure IV-3 : Les différentes composantes du champ d'ondes sismiques dans la croûte à distance régionale.

2.2.2.2 La fonction de Green empirique

Que ce soit pour simuler des mouvements forts ou étudier le mouvement à la source, le sismologue a besoin de connaître la fonction de Green du champ d'onde sismique. Cependant, il n'est pas toujours possible de connaître la structure du milieu de propagation avec la précision requise pour calculer une bonne approximation de sa fonction de Green. Une solution, initialement proposée par (Hartzell, 1978), consiste à utiliser comme fonction de Green le mouvement du sol engendré par les répliques d'un séisme ou de tout autre événement sismique. Pour être valide cet événement sismique devra vérifier les conditions suivantes (Hutchings et Wu, 1990) :

- Il devra avoir une taille inférieure d'au moins 1 degré de magnitude par rapport à l'événement étudié ; l'objectif étant que la fonction source de la fonction de Green empirique soit suffisamment brève par rapport au « gros séisme » étudié pour qu'elle puisse être assimilée à un Dirac temporel :

$$u(t) \approx \delta(t) * G(t) \approx G(t) \quad (\text{IV-18})$$

- L'hypocentre de l'événement choisi comme fonction de Green empirique devra être suffisamment proche de l'hypocentre du séisme étudié pour que le terme de propagation de ces deux événements soit identique.
- Le mécanisme au foyer de la fonction de Green empirique et celui du « gros séisme » devront être identiques ou similaires pour que les formes d'ondes générées par ces deux événements soient comparables.
- Il faut aussi que le milieu dans la région de la source soit suffisamment homogène ou, que l'on se trouve suffisamment loin de la source, pour que les variations spatiales de la fonction de Green d'un bout à l'autre de la faille du « gros séisme » ne soient pas significatives.

Cette méthode nous permet donc d'estimer une fonction de Green « expérimentale » comportant toute la complexité du milieu de propagation sans pour autant en connaître la structure. Encore faut-il que les conditions précédentes soient vérifiées pour qu'elle soit utilisable...

IV.3 Estimation de la fonction source d'un séisme

IV.3.1 Les méthodes actuelles d'estimation de la fonction source du mouvement sismique

La connaissance de la fonction source associée à un tremblement de terre permet de déterminer des caractéristiques importantes du processus de rupture comme la dimension de la faille, la vitesse de rupture, ou la chute de contrainte. Être capable d'identifier finement les caractéristiques temporelles de la fonction source du mouvement sismique et d'en extraire des lois générales régissant la rupture sismique, est un travail fondamental pour le sismologue. En effet, à défaut de posséder des moyens de prédiction fiables, le meilleur moyen de se protéger de la puissance destructrice des séismes est de faire de la prévention en simulant le plus fidèlement possible le champ d'ondes qu'il génère et déterminer ainsi son pouvoir destructeur. On comprend donc l'intérêt de connaître le plus précisément possible la physique et le mécanisme de la source sismique.

Actuellement, les sismologues ont à leur disposition différentes méthodes d'inversion leur permettant d'accéder à l'histoire du mouvement sismique à sa source. Outre les méthodes d'inversion en champ proche, permettant de cartographier le glissement sismique sur le plan de faille (Olson et Aspel, 1982; Hartzell et Heaton, 1983; Das et Kostrov, 1990; Cotton et Campillo, 1995) et (Das et Suhadolc, 1996) pour une étude des limites de ces méthodes, il existe d'autres méthodes, de moins bonne résolution spatiale du glissement, travaillant à échelle régionale (0-12°) ou télé-sismique (Hanks et Wyss, 1972; Wallace et al., 1981; Kikuchi et Ishida, 1993; Courboux et al., 1998; Vallée et Bouchon, 2003) et qui permettent d'avoir seulement les grandes caractéristiques : moment sismique, mécanisme au foyer et suivant la méthode, la fonction source. Ces méthodes d'inversion de la fonction source du mouvement sismique nécessitent donc de corriger ou plutôt de déconvoluer les enregistrements sismiques de la fonction de Green (équation IV-17). Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le sismologue a deux solutions pour estimer cette fonction de Green : soit il connaît la structure de la terre avec une précision suffisante lui permettant de simuler correctement la fonction de Green sur la bande de fréquence qu'il désire étudier ; soit il possède un enregistrement sismique pouvant faire office de fonction de Green empirique.

Cependant, comme nous l'avons déjà dit, en raison de la connaissance souvent limitée de la structure de la terre, la modélisation de la fonction de Green ne permet souvent, que d'identifier le contenu basse fréquence de la fonction source. D'autre part, il n'est pas toujours simple de trouver un événement sismique présentant toutes les conditions requises pour être une bonne fonction de Green empirique.

Enfin, d'autres méthodes d'inversion « généralisée », initiées par Andrews (1986), consistent à identifier simultanément, sur un ensemble de séismes et de stations, et pour un type d'ondes donné, l'amplitude spectrale de différents termes de l'équation suivante :

$$\ln|u_i(f)| = \ln|s_j(f)| + \ln|p_{ji}(f)| + \ln|h_i(f)| \quad (\text{IV-19})$$

où $u_i(f)$, $s_j(f)$, $p_{ji}(f)$ et $h_i(f)$ représentent respectivement le spectre du déplacement du sol enregistré à la $i^{\text{ème}}$ station, le spectre du terme de source du $j^{\text{ème}}$ séisme, le spectre du terme de propagation entre le $j^{\text{ème}}$ événement et la $i^{\text{ème}}$ station, et l'effet de site à la $i^{\text{ème}}$ station. Cette équation s'obtient directement en prenant le logarithme du module de l'équation de propagation (IV-17) en négligeant la réponse de capteur $I(t)$ ou en l'intégrant dans $u_i(f)$.

Seulement comme le souligne Andrews (1986), même dans le cas où l'on connaît la valeur du terme de propagation²⁶ $p_{ij}(f)$, les termes de source $s_j(f)$ et de site $h_i(f)$ ne sont identifiés qu'à un degré de liberté près. C'est à dire que l'on peut multiplier l'ensemble des termes de source par une fonction de f et diviser par la même fonction l'ensemble des termes d'effet de site, sans pour autant altérer l'ajustement aux données $u_i(f)$. Il s'agit d'ailleurs de la même indétermination associée à toute déconvolution aveugle (Chapitre 2), puisque tout compte fait extraire des enregistrements sismiques $u_i(t)$ les termes de source et de site, en vérifiant l'équation (IV-17) n'est rien d'autre qu'une déconvolution aveugle de $u_i(t)$.

Pour lever cette indétermination (Boatwright, 1991) propose un algorithme d'inversion « globale » sur un ensemble de séismes et de stations, où il donne à l'amplitude spectrale de la source une forme similaire au modèle de (Brune, 1970) :

$$s_j(f) = \frac{2\pi f u_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4}} \quad (\text{IV-20})$$

où $s_j(f)$ représente le spectre en vitesse de la fonction source, u_0 est directement proportionnel au moment sismique et f_c correspond à la fréquence coin. Néanmoins, même si cette méthode permet de séparer l'amplitude spectrale de l'effet de site, de celui de la source, et du terme d'atténuation, il ne peut retrouver la forme temporelle de la fonction source puisqu'il n'utilise pas la phase des signaux mis en jeux (Chapitre 2).

IV.3.2 Et l'estimation spectrale dans tout ça?

Comme nous venons de le voir, la méthode d'inversion globale précédente permet de séparer les différents termes de l'équation (IV-17) à condition d'utiliser simultanément les enregistrements de plusieurs séismes distincts et de se donner une forme a priori de la fonction source du mouvement sismique. Notre objectif est au contraire d'estimer cette fonction source du mouvement sismique en n'utilisant qu'un seul sismogramme sans aucune autre information a priori sur la source sismique. Or la déconvolution aveugle à phase minimale, comme la méthode d'inversion globale, sont toutes deux basées sur une estimation spectrale. Par conséquent, il peut sembler difficile d'extraire la fonction source du mouvement sismique sans ajouter d'information a priori sur la source ou la fonction de Green. D'autant

²⁶ En effet, dans la mesure où l'on peut assimiler la terre à un demi-espace homogène, le terme de propagation $p_{ij}(f)$ peut être considéré comme le produit de deux termes : un terme d'atténuation géométrique $r^{-\gamma}$ où r est la distance source-station et γ dépend du type d'onde choisie, et un terme d'atténuation anélastique $e^{-\pi\eta/Qc}$ où c et Q sont respectivement la vitesse et le facteur de qualité du type d'onde étudiée.

plus que, comme nous le dit Scherbaum, (1990), il est a priori impossible de séparer fonction source et absorption en utilisant seulement une seule station. C'est ce que nous avons voulu tester, tout d'abord en travaillant sur les arrivées directes, puis sur les ondes de coda des enregistrements en deux stations ECH et KIZ du séisme de Rambervillers (22 février 2003). Les caractéristiques de cet événement, ainsi que celles des stations d'enregistrement seront décrites en détail ultérieurement au paragraphe IV.6 .

Comme on peut le voir sur la Figure IV-4 b), les fonctions obtenues à partir d'une déconvolution à phase minimale des arrivées directes en onde S ont une durée et une complexité différentes. Or, puisque ces deux stations sont sur un même azimuth (Figure IV-10), elles devraient donc au contraire présenter la même fonction source apparente. Par ailleurs, leur amplitude spectrale (colonne de droite) ne présente pas la même décroissance à haute fréquence. De plus, alors que l'on devrait théoriquement observer une décroissance en ω^{-1} , l'ondelette obtenue en ECH montre une décroissance en ω^{-2} . Ces ondelettes doivent donc comporter non seulement l'information sur la source sismique, mais aussi celle relative à la propagation à l'intérieur de la terre.

a) Enregistrement du séisme de Rambervillers (22 février 2003), composante Nord-sud des Stations KIZ et ECH.

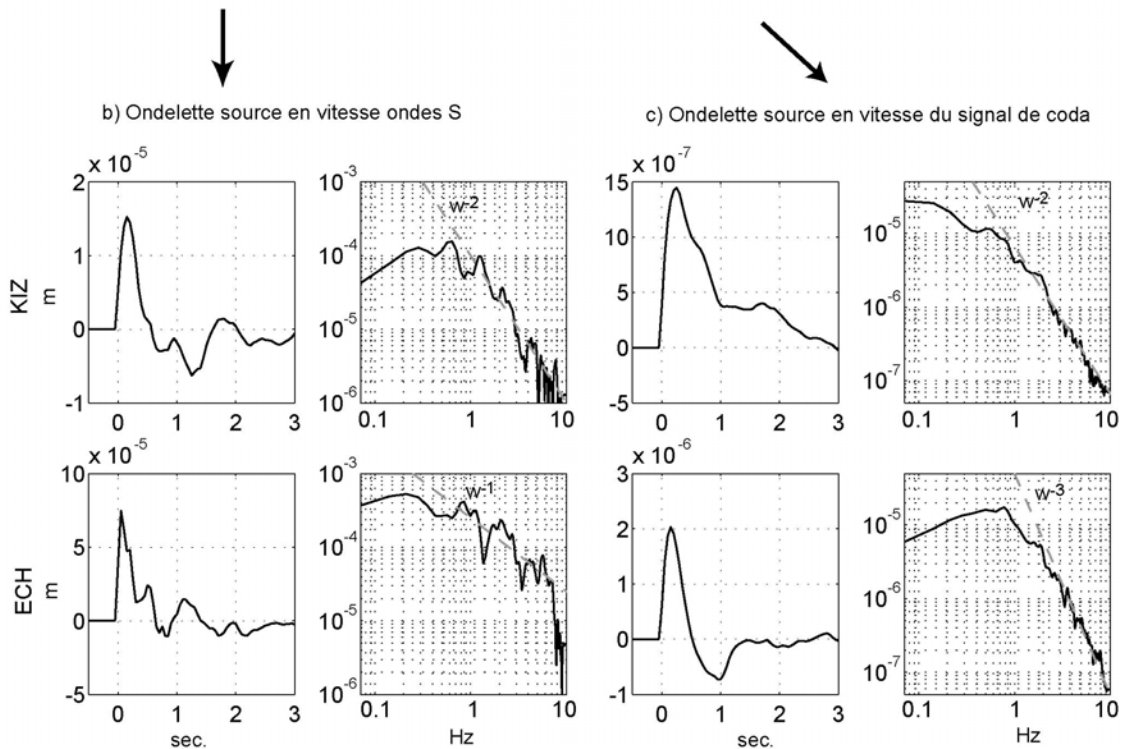
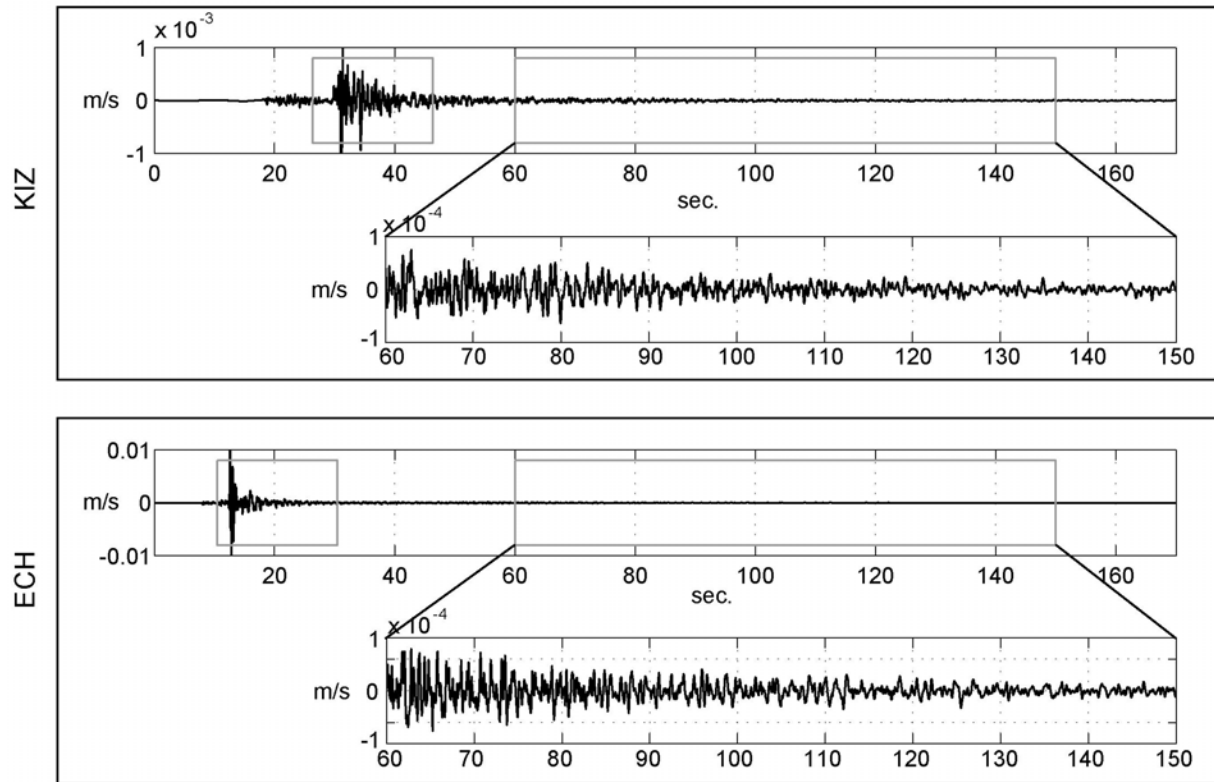


Figure IV-4 : Estimation spectrale à phase minimale de la fonction source en vitesse du séisme de Rambervillers à partir des arrivées directes b) ou à partir du signal de coda « brut » c).

Ainsi, la séparation est incorrecte car la fonction de Green associée aux arrivées directes n'est pas assimilable à un bruit blanc stationnaire. C'est d'ailleurs pour contrer cette difficulté que les méthodes d'inversion globale utilisent simultanément les signaux issus de plusieurs

stations distinctes. En effet, si les fonctions de Green associées à la propagation vers les différentes stations sismiques sont suffisamment différentes les unes des autres, il est alors possible d'extraire la fonction source commune par moyennage des signaux lors de l'inversion.

Par conséquent si on veut estimer, à partir d'un seul sismogramme, la fonction source du mouvement sismique grâce à un algorithme de déconvolution à phase minimale, il faudra travailler sur la partie du sismogramme la plus proche d'un signal aléatoire : c'est-à-dire sa coda.

Nous avons ainsi effectué une déconvolution à phase minimale du signal de coda des ondes S du séisme de Rambervillers aux stations KIZ et ECH (Figure IV-4 c). Ainsi, même si elles ont toutes deux des formes relativement similaires en terme de complexité, elles n'ont pas la même durée, ni la même décroissance spectrale haute fréquence. Par conséquent, même si le signal de coda présente l'avantage d'être un signal aléatoire, il ne peut malheureusement pas être considéré comme un bruit blanc, à cause notamment de l'atténuation dont l'effet peut être assimilé à celui d'un filtre passe bas. D'autre part comme nous l'avons montré sur le Kursk, la coda n'est pas stationnaire. C'est pour ces deux raisons que la première étape de l'algorithme de déconvolution aveugle à phase minimale du signal de coda que nous avons développé, consistera à stationnariser et blanchir la coda. L'objectif du blanchiment étant entre autre de corriger l'atténuation des ondes au cours de leur propagation.

IV.3.3 Avec quelle précision peut-on résoudre l'histoire du glissement sur la faille

Il est illusoire de vouloir déterminer complètement le glissement $\Delta u(\xi, t)$ seulement à partir du champ lointain (Aki et Richards, 1980) et ceci pour deux raisons.

Tout d'abord, la bande de fréquence utile d'un enregistrement sismique est souvent limitée en fréquence en raison de l'atténuation des ondes à l'intérieur de la terre, du bruit de fond sismique ou de la réponse du sismomètre lui-même. Il en résulte donc inévitablement un manque de résolution de l'opération d'inversion du glissement sur la faille. Ainsi, l'étude des enregistrements sismiques en champ lointain ne nous permettra pas de déterminer des détails de la source sismique inférieurs à la plus petite longueur d'onde observée.

Par ailleurs, d'après (Aki et Richards, 1980), une partie des ondes reste piégée à proximité de la faille, notamment celles dont la vitesse de phase le long de la surface de rupture Σ est supérieure à c . Le champ lointain ne comporte donc qu'une information partielle sur le

mouvement sismique à la source, qui doit donc être complétée par des enregistrements en champ proche si l'on veut avoir une bonne image du mouvement sismique sur la faille.

Néanmoins, en limitant l'inversion à un nombre restreint de paramètres, on peut tout de même contourner cette non-unicité de l'estimation du mouvement à la source $\Delta u(\xi, \omega)$ obtenue à partir de données en champ lointain. C'est l'objectif des modèles cinématiques de la rupture sismique. Classiquement, une rupture de propagation unidirectionnelle peut être caractérisée par 5 paramètres : la longueur de la faille, sa largeur, la vitesse de rupture, le déplacement final sur la faille et le temps de montée. Comme nous allons le voir maintenant, ces cinq paramètres vont nous permettre de complètement définir et d'interpréter le mouvement sismique en champ lointain généré par une faille.

IV.4 Les modélisations cinématiques de la source sismique.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la fonction source $S(\mathbf{x}, t)$ dépend bien sûr des caractéristiques spatiales de la vitesse de glissement sur la faille mais aussi de ses caractéristiques temporelles qui vont engendrer des interférences entre les ondes émises par des points distincts de la faille. Ces interférences ont d'ailleurs une double origine. La première est liée à la variabilité spatiale (le long de la faille) du temps de propagation $\tau_c(\xi) = |r_0 - \xi|/c$ des ondes entre un point de la faille et le récepteur. La seconde, plus implicite car intégrée à la vitesse de glissement $\Delta u(\xi, t)$ de l'équation (IV-12), est associée au terme de retard $\tau_v(\xi)$ dû à la propagation du front de rupture le long de la faille. En sismologie, en fonction de la gamme de longueur d'onde étudiée, on distingue 2 types d'approximations permettant de simplifier la formulation de la fonction source : le modèle du point source et l'approximation de Fraunhofer.

IV.4.1 Le modèle de source ponctuelle : la fonction source temporelle (source time function)

Le modèle du point source, souvent utilisé pour étudier les télé-séismes, s'intéresse essentiellement au contenu très basse fréquence d'un sismogramme. En effet, lorsque la longueur d'onde maximale observée λ est grande par rapport à la longueur de la faille L :

$$L \ll \lambda \quad (\text{IV-21})$$

on peut alors considérer que, quelle que soit l'histoire de la rupture, les ondes rayonnées en tous points de la faille arrivent simultanément au site d'observation. Grâce à une telle approximation, on néglige donc tout effet d'interférence qu'ils soient dus à la propagation du front de rupture ou à celle des ondes dans le milieu. Ainsi, tout se passe comme si toute

l'énergie de la source était rayonnée à partir d'un seul point, on parle donc de **source ponctuelle** par opposition aux modèles de source étendus tels que ceux associés, par exemple à l'approximation de Fraunhofer.

Dans un tel modèle de source ponctuelle, la vitesse de glissement $\Delta \dot{u}(\xi, t)$ ne présente plus de dépendance spatio-temporelle. La fonction source associée ne présente plus qu'une dépendance temporelle, on parle alors de **fonction source temporelle** :

$$S(t) = \mu \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u} \left(\xi, t - \frac{r_0}{c} \right) d\Sigma(\xi) \quad (\text{IV-22})$$

Ainsi en appelant $M(t)$ la fonction temporelle du moment sismique liée à l'évolution au cours du temps du glissement moyen sur l'ensemble de la faille :

$$M(t) = \mu \iint_{\Sigma} \Delta u(\xi, t) d\Sigma(\xi) \quad (\text{IV-23})$$

La fonction source temporelle s'exprime alors directement en fonction du taux de moment sismique $\dot{M}(t)$:

$$S(t) = \dot{M} \left(t - \frac{r_0}{c} \right) \quad (\text{IV-24})$$

Même si ce modèle du point source présente l'avantage de fournir une fonction source temporelle directement liée au moment sismique, il ne nous permet pas de prendre en considération les effets liés à la propagation de la rupture ou de celle des ondes dans le milieu. De tels effets ne seront pas négligeables, si comme nous, on s'intéresse à des enregistrements larges bandes.

IV.4.2 L'approximation de Fraunhofer

L'approximation de Fraunhofer est moins restrictive du point de vue fréquentiel que le modèle du point source. Elle consiste, en se limitant au terme d'ordre 1 en ξ/r_0 , à simplifier l'expression du terme d'interférences $\tau_c(\xi)$ dû à la propagation des ondes :

$$\tau_c(\xi) \approx \frac{1}{c} \left[r_0 - \xi \cdot \gamma + \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{(\xi \cdot \gamma)^2}{r_0} + o(\xi^2) \right] \quad (\text{IV-25})$$

où γ représente le vecteur directeur source-station.

Ainsi dans la mesure où le retard associé au terme $\left[|\xi|^2 - (\xi \cdot \gamma)^2\right]/2r_0$ est très inférieur au quart de la plus petite période T_{min} du signal étudié, on obtient une forme approximative de $\tau_c(\xi)$ ne faisant plus intervenir que la dépendance angulaire source-station :

$$\tau_c(\xi) \approx \frac{1}{c}(r_0 - \xi \cdot \gamma) \quad (IV-26)$$

avec pour condition que la plus courte longueur $\lambda = T_{min}c$ d'onde considérée soit telle que :

$$\lambda \gg \frac{2L^2}{r_0} \quad (IV-27)$$

où L représente la plus grande valeur prise par $|\xi|$ sur l'ensemble de la faille Σ .

Dans de telles conditions, la fonction source du mouvement sismique est donc de la forme suivante :

$$S(\gamma, t) = \mu \iint_{\Sigma} \Delta u \left(\xi, t - \frac{1}{c} [\mathbf{r}_0 - \xi \cdot \gamma] \right) d\Sigma(\xi) \quad (IV-28)$$

Ainsi, l'approximation de Fraunhofer, contrairement au modèle de la source ponctuelle, nous permet de prendre en compte, non seulement l'effet de la dimension finie de la faille mais aussi, l'influence sur la fonction source de la propagation de la rupture, comme nous allons le voir dans le modèle d'Haskell.

IV.4.3 Le modèle d'Haskell

Le modèle de Haskell (Haskell, 1966) est l'un des modèles cinématiques de rupture à propagation unidirectionnelle le plus utilisé en sismologie. Il consiste en une faille rectangulaire de **longueur L** et de **largeur W** sur laquelle la rupture se propage instantanément sur sa largeur tandis qu'elle se propage avec une **vitesse de rupture v** sur sa longueur (Figure IV-5 a).

Haskell considéra par ailleurs qu'après le passage du front de rupture, chaque point de la faille, de coordonnées $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, suit la même fonction de glissement :

$$\Delta u(\xi, t) = \begin{cases} D \cdot R_T \left(t - \frac{\xi_1}{v} \right) & \xi_1 \in [0, L] \quad \xi_2 \in [0, W] \\ 0 & \xi_1 \notin [0, L] \quad \xi_2 \notin [0, W] \end{cases} \quad (IV-29)$$

où **D** est le **glissement final** de chaque point de la faille et $R_T(t)$ une fonction rampe définie de la façon suivante :

$$R_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{T} & t \in [0, T] \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (\text{IV-30})$$

avec T le **temps de montée** (Figure IV-5 b), qui correspond au temps que met un point de la faille pour atteindre son glissement final D .

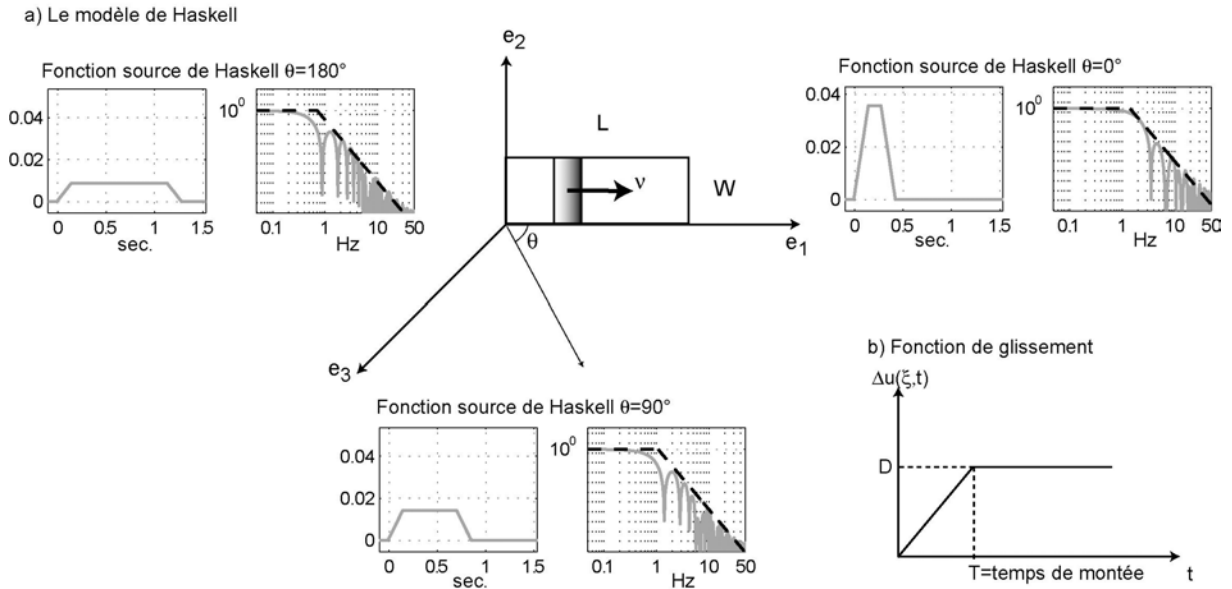


Figure IV-5 : Le modèle de Haskell et la directivité de sa fonction source.

Ainsi en considérant que la largeur de la faille est négligeable par rapport à sa longueur, le terme d'interférence $\xi \cdot \gamma$ ne dépend, en première approximation, que de ξ_l . La fonction source du mouvement sismique (IV-12) prend alors la forme suivante :

$$S(t, \theta) = \mu \iint_{\Sigma} D \cdot \dot{R}_T \left(t - \frac{\xi_l}{v} - \frac{1}{c} (r_0 - \xi_l \cos \theta) \right) d\Sigma(\xi) \quad (\text{IV-31})$$

où θ est l'angle entre le vecteur directeur source-station γ et c la vitesse des ondes dans le milieu. L'intégration de (IV-31) est directe et nous fournit l'expression suivante de la fonction source en champ lointain en fonction du moment sismique M_0 :

$$S(t, \theta) = M_0 \frac{1}{\tau_0} \left[R_T \left(t - \frac{r_0}{c} - \tau_0 \right) - R_T \left(t - \frac{r_0}{c} \right) \right] \quad (\text{IV-32})$$

où τ_0 est la **durée apparente** de la rupture. Elle est fonction de la direction d'observation θ , de la vitesse de rupture v :

$$\tau_0 = L \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \cos \theta \right) \quad (\text{IV-33})$$

Ainsi, comme on peut le voir sur la figure (Figure IV-5), l'ondelette source associée au modèle de Haskell a une forme trapézoïdale de durée égale à $T + \tau_0$ et une amplitude proportionnelle à M_0/τ_0 . Comme τ_0 dépend de θ , la fonction source n'est donc pas une simple fonction du temps mais dépend aussi de la direction d'observation. Cette directivité de la fonction source sismique est l'analogue de l'effet Doppler en acoustique. Elle se traduit par une diminution de sa durée lorsqu'elle est observée par des stations sismologiques situées dans la direction de propagation de la rupture. En revanche, la fonction source a une durée maximale aux stations situées dans une direction opposée à la direction de propagation de la rupture. Ainsi comme la fonction source (IV-32) n'est pas une simple fonction temporelle, on la désigne plutôt sous le terme de **fonction source apparente**²⁷.

D'un point de vu spectral, on obtient aisément une expression de l'amplitude spectrale de la fonction source du modèle de Haskell, en considérant que celle-ci est équivalente à la convolution de deux fonctions portes de durée respective T et τ_0 :

$$S(t, \theta) = M_0 \frac{1}{T} \Pi_T(t) * \frac{1}{\tau_0} \Pi_{\tau_0}(t) \quad (\text{IV-34})$$

Ainsi étant donné que la Transformée de Fourier d'une fonction porte est un sinus cardinal modulé par un terme de déphasage²⁸, l'amplitude spectrale de la fonction source du modèle de Haskell est donc de la forme :

$$S(\omega, \theta) = M_0 \cdot \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| \cdot \left| \frac{\sin(\omega \tau_0/2)}{\omega \tau_0/2} \right| \quad (\text{IV-35})$$

Le spectre de la fonction source est donc équivalent à celui d'un filtre passe bas dont la limite basse fréquence tend vers le moment sismique M_0 , tandis qu'à haute fréquence le spectre a une décroissance en ω^{-2} . L'intersection de ces deux asymptotes haute et basse fréquence nous donne la fréquence coin f_c de la rupture sismique :

$$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{T \tau_0}} \quad (\text{IV-36})$$

Cette fréquence coin est une quantité importante pour le sismologue puisqu'elle est inversement proportionnelle à la dimension de la zone de rupture. En effet, comme nous le

²⁷ C'est-à-dire de fonction source « vue par une certaine station ».

²⁸ $\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases} \xRightarrow{TF} TF(\Pi_T(t)) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-i\omega \frac{T}{2}}$

montre (Savage, 1972) pour le modèle de Haskell, la surface de la faille $A=WL$ est directement reliée à la fréquence coin par la relation suivante :

$$4\pi^2 f_c^2 = \frac{14.8\beta^2}{A} \quad (\text{IV-37})$$

avec une vitesse de rupture v telle que $v/\beta=0.9$, β étant la vitesse des ondes S et en faisant l'hypothèse que le temps de montée T est contrôlé par le temps de propagation du front de rupture sur la demi-largeur de la faille $1.15T=W/2v$ et que l'on a une rupture bilatérale $\tau_0=L/2v$.

D'autre part, la décroissance haute fréquence du spectre est aussi un paramètre important puisqu'il nous renseigne d'une part sur le mode de propagation, mais aussi sur le mécanisme d'arrêt, appelé aussi phase de cicatrisation. Par exemple, comme nous le montre (Hirasawa et Stauder, 1965) si au lieu d'avoir une rupture avec une propagation unilatérale dans la direction 1, on a une propagation simultanée suivant 1 et 2, alors la décroissance haute fréquence est en ω^{-3} .

IV.4.4 Le modèle de Brune (Brune, 1970; Brune, 1971)

En 1970, Brune propose à partir de considérations physiques concernant le champ d'ondes sismiques généré par une dislocation, l'expression suivante du déplacement du sol en champ lointain :

$$u(t) = f \frac{r}{R} \frac{\Delta\sigma}{\mu} \beta \left(t - \frac{R}{\beta} \right) e^{-\alpha \left(t - \frac{R}{\beta} \right)} \quad (\text{IV-38})$$

où $f r/R$ correspond à un terme d'atténuation géométrique, r correspond au rayon de la faille circulaire équivalente à la dislocation, R , β , $\Delta\sigma$ et μ sont respectivement la distance source station, la vitesse des ondes S, la chute de contrainte et le module de cisaillement.

Dans le domaine spectral, cette expression devient :

$$|u(\omega)| = f \frac{r}{R} \frac{\Delta\sigma}{\mu} \beta \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (\text{IV-39})$$

α correspond donc à la fréquence coin de l'événement sismique. Cette forme spectrale de la fonction source du mouvement sismique est très utilisée notamment dans des méthodes d'inversion généralisée (cf. Paragraphe IV.3.1). Par ailleurs, nous verrons dans ce qui va suivre que l'ondelette source de Brune est une ondelette à phase minimale.

Enfin, il propose aussi une expression très utilisée en sismologie permettant de relier le moment sismique à la chute de contrainte de l'événement considéré :

$$M_0 = \frac{16}{7} \Delta \sigma r^3 \quad (\text{IV-40})$$

Comme nous l'avons dit lors de l'étude du Kursk (Chapitre 3), l'ondelette source du mouvement sismique obtenue par déconvolution à phase minimale correspondra à la vraie fonction source du mouvement sismique seulement si elle est réellement à phase minimale. Ainsi, avant d'appliquer l'algorithme de déconvolution à phase minimale sur le séisme de Rambervillers afin d'en obtenir la fonction source, nous allons donc étudier le caractère phase minimale de différents modèles de fonctions sources sismiques de type dislocation utilisées en sismologie.

IV.5 Caractère phase minimale de la fonction source sismique

IV.5.1 Forme générale des ondelettes sources synthétiques des modèles cinématiques ou quasi-dynamiques.

D'une façon générale tous les modèles de source qu'ils soient purement cinématiques tels que le modèle de Haskell ou le modèle de Sato (Sato et Hirasawa, 1973), ou des modèles quasi-dynamiques tels que celui de Madariaga (1976) ou Das et Aki (1977), considèrent que le glissement ne change pas de direction. Ils se caractérisent donc tous par des fonctions sources positives. D'autre part, comme on peut le voir sur la Figure IV-6, tous ces modèles présentent des fonctions sources quasiment symétriques pour peu que l'on ne se trouve pas dans la direction de propagation de la rupture ($\theta=0^\circ$ ou $\theta=90^\circ$).

Par conséquent, on peut considérer, en première approximation, que la forme générale de l'ondelette source d'une dislocation à l'intérieur de la terre est celle d'une ondelette positive et symétrique.

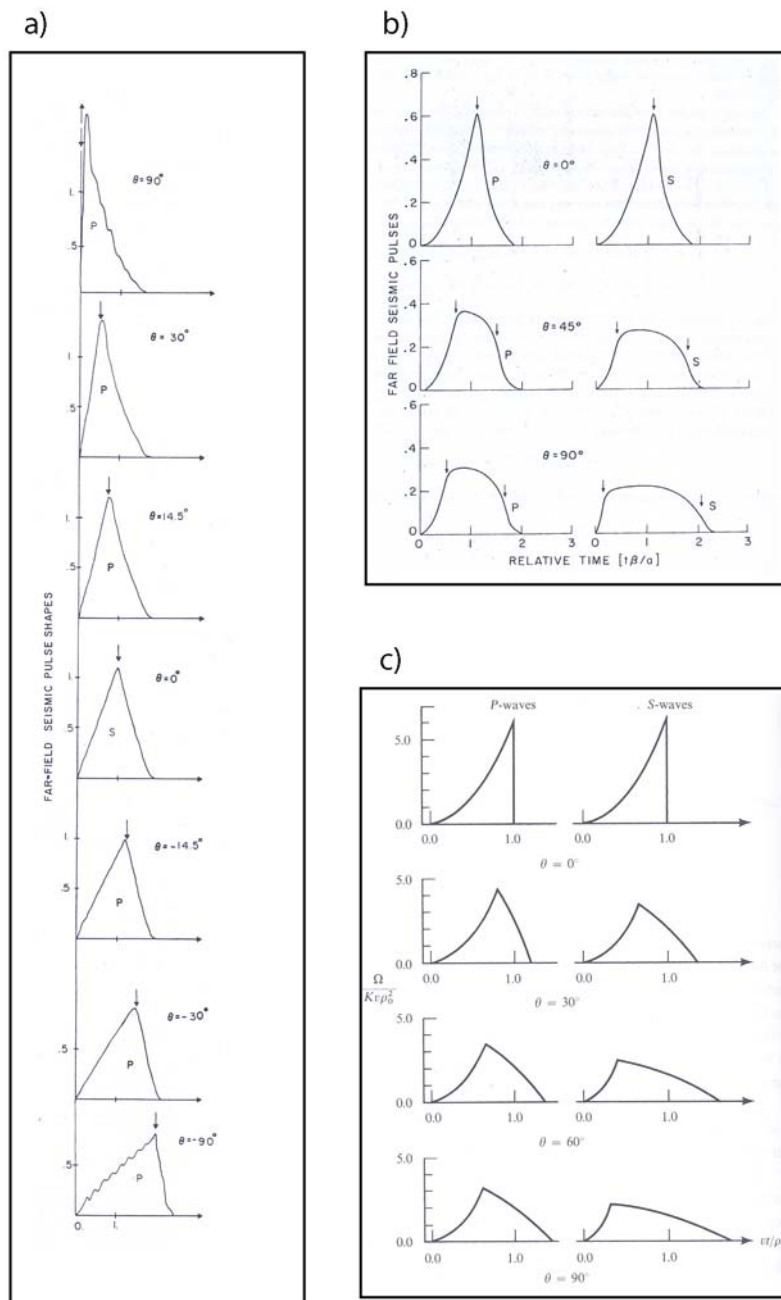


Figure IV-6 : Exemples de fonctions sources en champ lointain obtenues par modélisation, a) Modèle des barrières, cas d'une rupture unilatérale (in-plane) (Das et Aki, 1977) ; b) modèle quasi-dynamique de (Madariaga, 1976) pour une dislocation circulaire subsonique ; c) Modèle cinématique de (Sato et Hirasawa, 1973).

IV.5.2 Caractère phase minimale d'une ondelette positive et symétrique

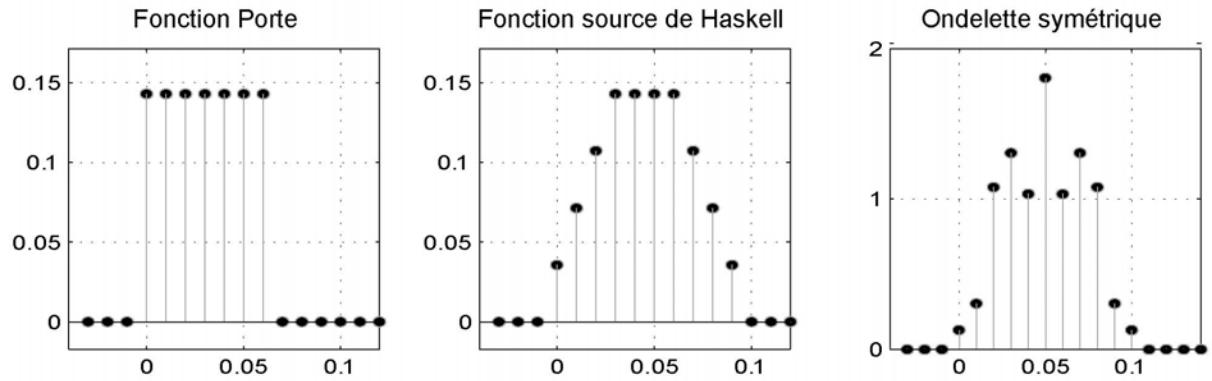
Or comme nous allons le montrer une ondelette symétrique n'est pas à phase minimale. Considérons dans un premier temps, une ondelette source de type Haskell. Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que celle-ci peut s'exprimer comme la convolution de deux

fonctions portes (IV-34). Supposons maintenant que l'on ait échantillonné l'ondelette source du modèle de Haskell de telle sorte que $T=pT_e$ et $\tau_0=qT_e$ ($p,q \in \mathbb{N}$). Puisque la transformée en Z de la convolution de deux signaux est le produit de leur transformée en Z, l'ondelette source de Haskell est constituée des zéros des deux fonctions portes $\Pi_{pT_e}(n)$ et $\Pi_{qT_e}(n)$. Considérons la transformée en Z de $\Pi_{pT_e}(n)$:

$$\Pi_{pT_e}(z) = \sum_{k=0}^p z^{-k} = \frac{1 - z^{-(p+1)}}{1 - z^{-1}} \quad (\text{IV-41})$$

Les zéros de $\Pi_{pT_e}(n)$ correspondent donc aux $p+1$ racines de l'unité privées de 1 (Figure IV-7). Ainsi, le modèle MA équivalent à l'ondelette de Haskell, comporte donc $p+q$ zéros, tous situés sur le cercle unité du plan complexe, et correspondant aux racines $p+1$ et $q+1$ privées de 1 (Figure IV-7).

a) Ondelettes sources échantillonnées



b) Zéros des Transformées en Z des ondelettes sources ci-dessus

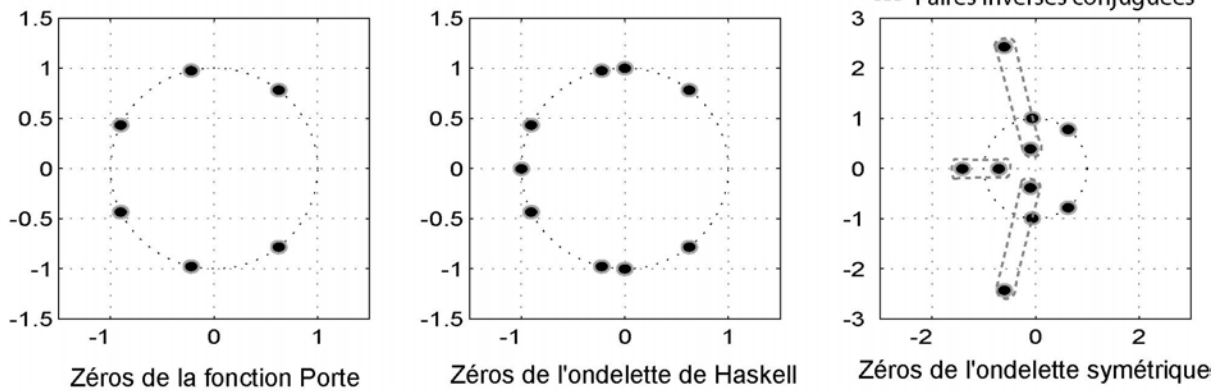


Figure IV-7 : Position des zéros de trois ondelettes : fonction porte, ondelette de Haskell et ondelette symétrique.

Il ne s'agit donc pas d'une ondelette à phase minimale puisque ses zéros ne sont pas à l'intérieur du cercle unité. D'ailleurs, les relations de Bode-Bayard sont inutilisables puisque, en raison de l'annulation du spectre en chaque zéro, le logarithme de l'amplitude spectrale de l'ondelette diverge. Cependant dans la pratique, en raison du bruit inhérent à toute mesure, le

spectre de l'ondelette ne s'annulera pas complètement. En effet, comme on peut le voir sur la Figure IV-8, l'ajout d'un bruit basse fréquence à l'ondelette de Haskell écarte les zéros du cercle unité, rendant alors possible l'utilisation des relations de Bode-Bayard. C'est ce que nous avons fait pour calculer l'ondelette équivalente à phase minimale de la fonction source bruitée du modèle de Haskell. Comme on peut le voir sur la Figure IV-8, l'ondelette à phase minimale est très similaire à l'ondelette initiale en terme de forme générale, mais surtout en terme de durée.

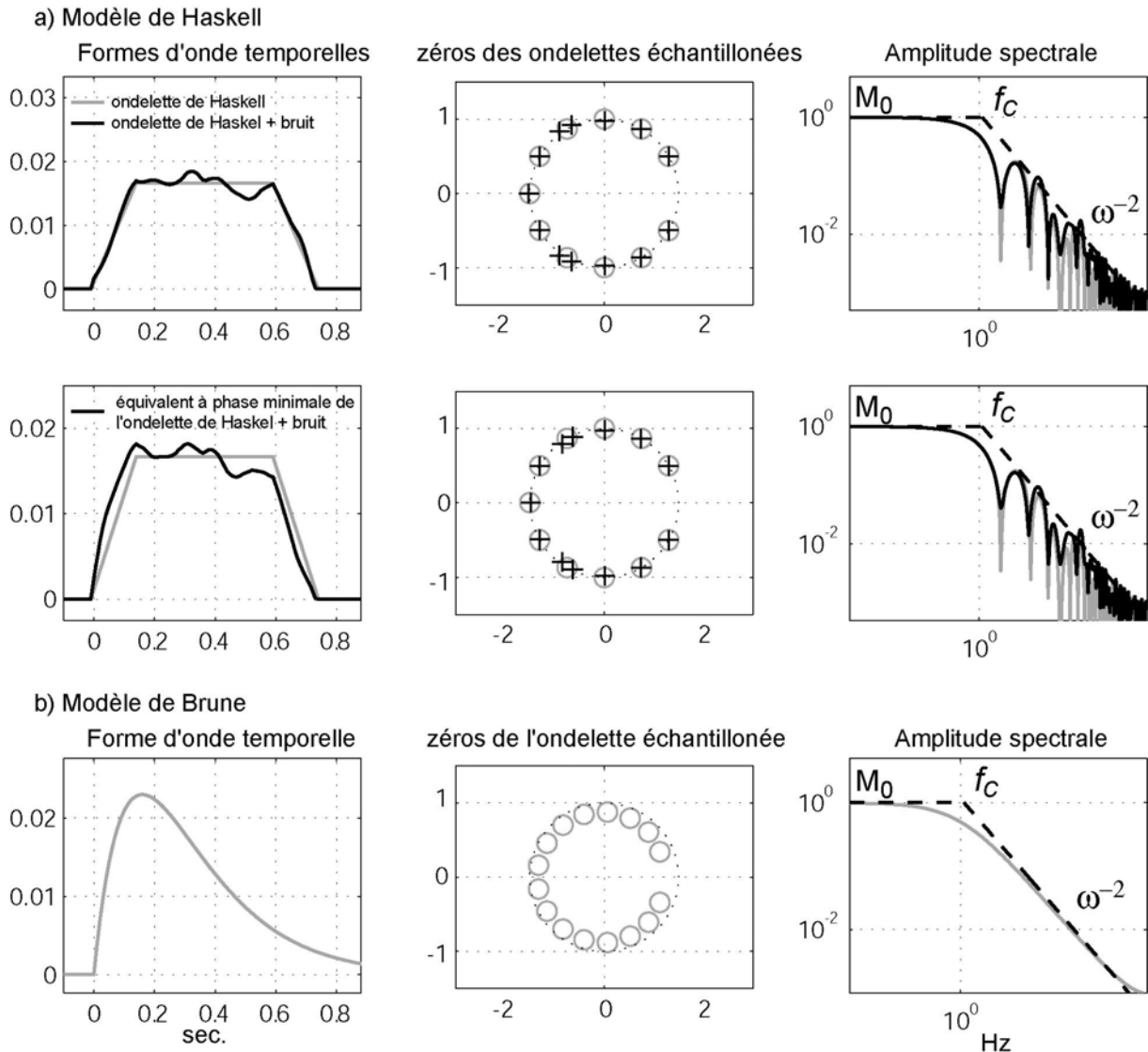


Figure IV-8 : Etude de l'équivalent à phase minimale de l'ondelette source de Haskell et caractéristiques de l'ondelette source associée au modèle de Brune.

D'une façon plus générale, on peut montrer qu'une ondelette de type MA symétrique est une ondelette dont les zéros sont sur le cercle unité ou en paires inverses l'un de l'autre par rapport au cercle unité (Figure IV-7). En effet, une ondelette symétrique est une ondelette qui est inchangée par retournement du temps :

$$S(n) = S(-n) \quad (\text{IV-42})$$

Si on prend la transformée en z de cette équation, on obtient la relation :

$$S(z) = S\left(\frac{1}{z}\right) \quad (\text{IV-43})$$

Ainsi, si z_o est un zéro de $S(z)$, z_o^{-1} l'est aussi. Les zéros de $S(z)$ sont donc par conséquent, soit sur le cercle unité, soit en paires inverses par rapport au cercle unité. Si $S(z)$ comporte n_c zéros z_{ci} sur le cercle unité et n_m zéros z_{mi} à l'intérieur du cercle unité ($i \in [1, 2, \dots, n_m]$), une ondelette symétrique peut donc être considérée comme la convolution de trois ondelettes :

$$S(n) = S_c(n) * S_m(n) * S_m(-n) \quad \text{où} \quad \begin{cases} S_c(z) = \prod_{i=1}^{n_c} (1 - z_{ci} z^{-1}) \\ S_m(z) = \prod_{i=1}^{n_m} (1 - z_{mi} z^{-1}) \end{cases} \quad (\text{IV-44})$$

$S_m(-n)$, qui est l'équivalent phase maximale de $S_m(n)$, a tous ses zéros à l'extérieur du cercle unité. L'ondelette symétrique $S(n)$ n'est donc pas à phase minimale. Par conséquent une déconvolution phase minimale ne nous permettra pas de retrouver la vraie forme de l'ondelette source. On pourrait dans une certaine mesure « symétriser » l'ondelette à phase minimale en estimant ses zéros puis en rétablissant pour les zéros « doubles » les paires inverses conjuguées et en positionnant les zéros « simples » sur le cercle unité. Cependant la présence de bruit sur notre estimation modifie la position réelle des zéros et rend donc difficile l'utilisation d'une telle méthode notamment en ce qui concerne les zéros « doubles ». C'est la raison pour laquelle dans un premier temps nous avons préféré utiliser l'ondelette équivalente à phase minimale.

IV.5.3 Etude des différences entre une ondelette source sismique et son équivalent à phase minimale

L'ondelette équivalente à phase minimale est différente de la vraie ondelette, nous avons donc cherché à quantifier cette différence. Pour ce faire, nous nous sommes intéressés, d'une part à la durée de l'ondelette t_s (support énergétique), d'autre part à la position temporelle de son barycentre énergétique t_b :

$$t_b = \frac{\sum_{n=1}^N n \cdot S(n)^2}{\sum_{n=1}^N n} \quad (\text{IV-45})$$

Les temps t_b et t_s sont exprimés en nombre d'échantillons. Nous avons étudié le comportement de trois types d'ondelette. Tout d'abord, on a considéré une ondelette « quelconque » dont les valeurs positives ou négatives sont tirées de façon aléatoire suivant une loi Gaussienne. Ensuite, puisque la fonction source du mouvement sismique est positive, on a aussi considéré une ondelette positive correspondant à la valeur absolue de l'ondelette « quelconque » précédente. Enfin, comme nous avons vu que la fonction source du mouvement sismique peut-être considérée en première approximation comme étant symétrique, on a aussi testé une ondelette positive symétrique. Cette dernière ondelette est obtenue en remplaçant les $N/2$ dernières valeurs de l'ondelette positive par ses $N/2$ premières valeurs.

Pour notre simulation, nous avons tiré au hasard 4096 ondelettes de longueur variant de 5 à 51 échantillons. Pour chaque ondelette nous avons calculé la durée de son support énergétique ainsi que celui de son équivalent à phase minimale (Figure IV-9). D'autre part, afin de quantifier la déformation de l'ondelette initiale par rapport à son équivalent à phase minimale, nous avons étudié la variation de la position de leur barycentre énergétique respectif (normalisé par sa position dans l'ondelette initiale) (Figure IV-9)

Comme on peut le voir sur la Figure IV-9 a), l'ondelette équivalente à phase minimale de l'ondelette « quelconque », a toujours une durée inférieure à l'ondelette initiale. On retrouve bien l'idée selon laquelle l'équivalent à phase minimale est l'ondelette qui libère toute son énergie le plus rapidement possible. Par contre, il n'en est pas de même en ce qui concerne les ondelettes positives, qu'elles soient symétriques ou non. Comme on peut le voir sur la Figure IV-9-a), les ondelettes positives, qu'elles soient symétriques ou non, ont quasiment la même durée que leur équivalent à phase minimale. Certaines d'entre elles sont même légèrement plus longues. Par conséquent, comme on peut le voir sur la Figure IV-9 b), la concentration de l'énergie de l'équivalent à phase minimale se traduit principalement par le déplacement de son barycentre énergétique vers le début de l'ondelette. Lorsque l'on observe la variation de la position du barycentre énergétique de l'ondelette symétrique positive et de son équivalent phase minimale en fonction de la distance moyenne des zéros de l'ondelette phase minimale (Figure IV-9 b), on remarque la présence d'une asymptote inférieure. Ainsi, plus les zéros sont éloignés du cercle unité plus la forme de l'ondelette équivalente à phase minimale sera différente de l'ondelette originale. Même si la limite semble beaucoup plus diffuse, le comportement en fonction du nombre de zéros à l'extérieur du cercle unité (couleur), semble indiquer une tendance similaire pour l'ondelette « quelconque » et l'ondelette positive.

La Figure IV-8-c) permet de visualiser la variation de la forme de l'ondelette en fonction de la distance maximale de ses zéros au cercle unité. On observe une asymptote supérieure signifiant que plus les zéros sont proches du cercle unité, plus la forme de l'ondelette équivalente phase minimale sera proche de son ondelette originale.

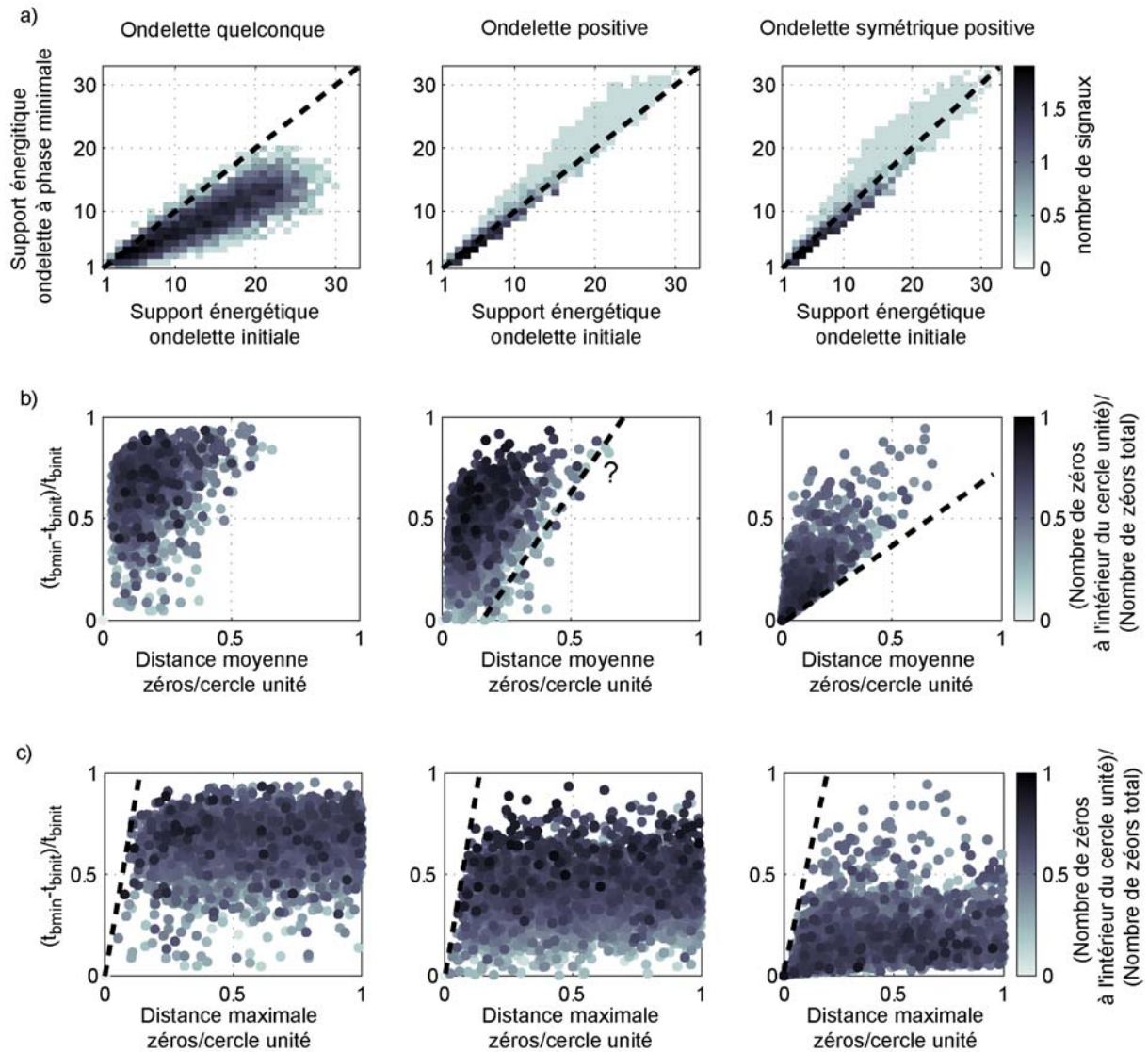


Figure IV-9 : Etude de la modification de la forme générale de différents types d'ondelette après transformation en leur équivalent à phase minimale.

Ainsi ces simulations nous montrent d'une part que le support énergétique d'une ondelette positive est le même que celui de son équivalent à phase minimale. Puisque la fonction source d'un événement sismique est positive, son équivalent à phase minimale nous donnera donc accès à la durée réelle de la fonction source. Ce qui, comme la fréquence coin, nous permet d'accéder par exemple à la dimension de la faille (Boatwright, 1980; Deichmann, 1999).

D'autre part, l'étude de la variation de la position du barycentre énergétique nous a permis d'étudier qui de l'amplitude ou de la phase du spectre de l'ondelette influence le plus sa forme. En effet, nous avons observé que plus les zéros d'une ondelette sont proches du cercle unité moins sa forme est sensible à sa phase. Ou si on préfère, plus le module du spectre de l'ondelette présente des variations marquées, plus sa forme temporelle est contrôlée seulement par son amplitude spectrale. D'une part parce que cette propriété est beaucoup plus marquée pour une ondelette symétrique positive et d'autre part parce que l'ondelette source du mouvement sismique est assimilable à un filtre basse bas (zéros « hautes fréquences » proches du cercle unité), nous pouvons supposer que d'une certaine façon, la forme générale de l'ondelette équivalente à phase minimale du mouvement sismique est proche de la vraie fonction source.

Ainsi, même si, l'équivalent à phase minimale n'est pas la vraie fonction source du mouvement sismique on peut considérer tout de même qu'en première approximation elle nous en donne une bonne image. Dans ce qui va suivre, nous allons donc chercher à estimer l'équivalent phase minimale de la fonction source d'un séisme de magnitude modéré.

IV.6 Les données et le contexte sismologique de l'étude

IV.6.1 Le séisme de Rambervillers/Saint-Dié-en-Vosges (88)

Le 22 février 2003 à 20h41 (TU), un séisme de magnitude 5.4 (ReNass) s'est produit au Nord-Est de la France, à l'ouest de la ville de St-Dié par 48.34° de latitude Nord et 6.66° de longitude Est (Figure IV-10). Le centre sismologique Suisse de Zurich a proposé un mécanisme composé de deux composantes normales décrochantes, l'une normale sénestre de direction Nord-Sud (174°) à pendage ouest de 47° (rake= -50°), l'autre normale –dextre de direction NW-SE (304°) à pendage Nord de 56° (rake= -124°) (Figure IV-10 b). Ce séisme fut suivi par plus de deux cents répliques dont nous avons récupéré la localisation sur le site du ReNass (<http://renass.u-strasbg.fr/>). Comme on peut le voir sur la (Figure IV-10 a), celles-ci s'alignent suivant une direction Nord-Sud nous permettant d'identifier lequel des deux plans focaux a glissé. D'autre part, les répliques sont dans l'ensemble situées au Sud et à l'Est de l'épicentre de l'événement principal, ce qui nous indique que la rupture s'est donc très vraisemblablement propagée suivant le plan focal à 173° du Nord vers le Sud. De plus, étant donné que le plan focal Nord-Sud a un pendage vers l'Ouest de 47° et que l'ensemble des répliques est situé à l'Est de l'événement principal, on peut donc ajouter que la rupture s'est donc initiée à la base de la faille, puis propagée vers la surface. Notons qu'il s'agit de localisations absolues et non relatives et qu'il est donc difficile d'être complètement

catégorique en ce qui concerne la direction de propagation de la rupture, néanmoins les tendances sont bien visibles. Enfin, ajoutons que le moment sismique fourni par Zurich est de l'ordre de 1.64×10^{16} N.m correspondant à une magnitude de moment $M_w = 4.78$.

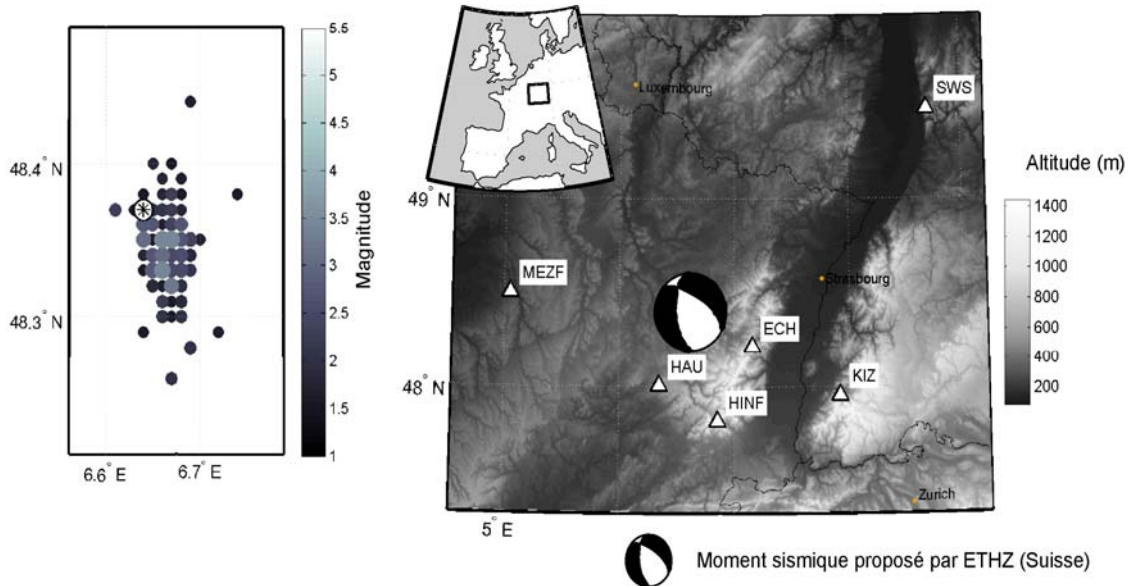


Figure IV-10 : Situation géographique de l'étude et localisation des répliques du séisme de Rambervillers (22 février 2003 à 20h41).

IV.6.2 Les stations sismologiques retenues

Nous avons utilisé les enregistrements issus de stations appartenant à trois réseaux sismologiques différents : le réseau international large bande GEOSCOPE, le réseau allemand LED courte période et le réseau français courte période du LDG (Figure IV-10 b).

En ce qui concerne le réseau GEOSCOPE nous avons utilisé la station d'Echery (ECH) consistant en un sismomètre large bande de type STS1 construit par G. Streckeisen AG de période propre de 100s (tableau). Cette station du réseau GEOSCOPE est très intéressante puisque située à plus de 250m de profondeur dans des Gneiss, les signaux sismiques qu'elle enregistre ne seront très probablement pas altérés par des effets de sites.

Toujours dans un but d'éliminer au maximum la présence d'éventuels effets de site, nous n'avons sélectionné que deux stations du réseau courte période allemand LED : les stations KIZ et SWS toutes deux situées à 54m de profondeur (tableau ci-dessous). Elles sont toutes les deux constituées d'un capteur Lennartz courte période de type LE3D de période propre de 1s. Ainsi, après avoir corrigé les signaux de la réponse du capteur, nous les avons re-échantillonnés à 20Hz, de façon à avoir des données homogènes avec ECH.

Nous avons complété au Sud notre jeu de données par les enregistrements de trois stations du réseau du LDG, constituées par des capteurs courtes période ZM500 à 1s (tableau ci-dessous). D'une manière analogue aux données allemandes, après avoir corrigé de la réponse du capteur les enregistrements de ces trois stations, nous les avons re-échantillonnés à 20Hz.

Enfin, de façon à éliminer le bruit sismique basse fréquence de nos enregistrements nous les avons tous filtrés par un filtre passe haut d'ordre 2 de type Butterworth de fréquence coin de 0.1 Hz.

	GEOSCOPE	Réseau LED		Réseau LDG		
Nom	ECH	KIZ	SWS	MEZF	HAU	HIN
Type station	Large bande STS1	Courte période LE3D1S	Courte période LE3D1S	Courte période ZM500	Courte période ZM500	Courte période ZM500
Période propre (sec.)	100	1	1	1	1	1
Latitude	48.216	47.9562	49.4843	48.5019	48.0056	47.8167
Longitude	7.158	7.9182	8.7008	5.0519	6.3481	6.8531
Profondeur Station (m)	250	54	54	?	?	?
Azimut (Deg)	113,9	115,4	49,8	277,7	208,2	165,5
Distance épiscopale (km)	42	105	195	118	46	63.5
Nombre de composantes	3	3	3	3	Z	Z
Fe (Hz)	20	62.5	62.5	50	50	50

Nous allons donc maintenant tenter d'extraire de ces enregistrements en vitesse la fonction source du tremblement de terre de Rambervillers.

IV.7 Détermination Q_{coda}

Nous avons estimé Q_{coda} grâce à un processus identique à celui que nous avons utilisé pour l'étude de la fonction source du Kursk. Notre objectif est bien sûr de quantifier $Q_c(\omega)$ afin de

pouvoir identifier puis corriger nos signaux du filtre non stationnaire associé à l'atténuation des ondes au cours de leur propagation dans le milieu :

$$|A_{coda}(\omega, t)| = \frac{e^{-\frac{\omega t}{2Q_c(\omega)}}}{t} \quad (IV-46)$$

L'algorithme d'estimation de $Q_c(\omega)$ que nous avons utilisé se décompose en deux étapes. La première consiste à estimer la $Q_c(\omega_i)$ par régression linéaire sur l'évolution temporelle du logarithme de l'enveloppe énergétique du signal de coda pour une bande de fréquence centrée sur $\omega_i = 2\pi[0.3 \ 0.41 \ 0.54 \ 0.73 \ 0.97 \ 1.3 \ 1.74 \ 2.33 \ 3.12 \ 4.17 \ 5.58 \ 7.47]$. La deuxième étape consiste à modéliser le comportement fréquentiel de $Q_c(\omega)$ suivant la formulation classique en sismologie pour le champ d'onde de coda (Herrmann, 1980; Singh et Herrmann, 1983) :

$$Q_c(f) = Q_0 f^\alpha \quad (IV-47)$$

Les paramètres Q_0 et α seront estimés par régression linéaire sur la dépendance fréquentielle du logarithme de $Q_c(\omega_i)$.

La Figure IV-11 présente les résultats bruts de $Q_c(\omega_i)$ ainsi que le modèle correspondant en loi puissance (IV-47) pour les 6 stations sismologiques que nous avons retenues. Par ailleurs, pour les stations KIZ, SWS, ECH, MEZF, nous avons utilisé simultanément les résultats $Q_c(\omega_i)$ obtenus sur les trois composantes du sismogramme afin de stabiliser au maximum notre estimation de $Q_c(\omega)$.

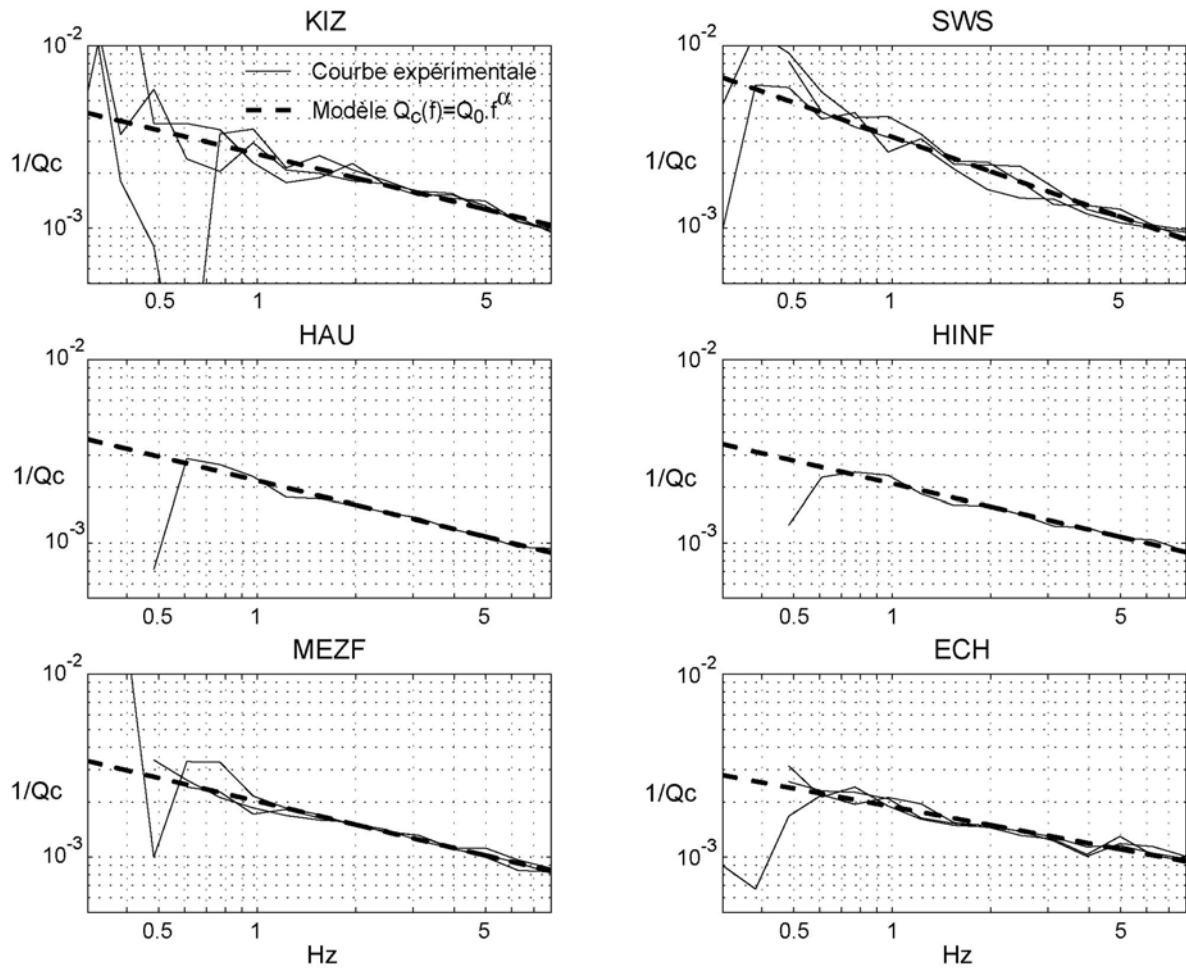


Figure IV-11 : Résultats de l'estimation de $Q_c(\omega)$ obtenue par régression linéaire de la décroissance temporelle de l'enveloppe énergétique de la coda des enregistrements sismiques (modèle en simple scattering).

Enfin, nous avons regroupé les paramètres Q_0 et α que nous avons obtenus sur l'ensemble des stations dans les tableaux suivant :

	Modèle en simple scattering					
Paramètres de Coda	KIZ	SWS	HAU	HINF	MEZF	ECH
Q_0	392.6	316.3	458.5	475.5	495.5	530.6
α	0.43	0.63	0.44	0.41	0.42	0.33

	Modèle diffusif					
Paramètres de Coda	KIZ	SWS	HAU	HINF	MEZF	ECH
Q_0	319.5	274.4	375.6	405.3	434.6	441.2
α	0.5	0.66	0.48	0.45	0.45	0.38

D'une façon générale, les valeurs de Q_0 , que nous avons estimées à partir du modèle en simple scattering ou du modèle diffusif, sont supérieures aux estimations faites sur les ondes Lg par (Campillo et al., 1985) pour le massif central $290f^{0.52}$, ou en moyenne sur l'ensemble de la France $Q_s=320\pm 20f^{0.5}$ (Campillo et Plantet, 1991). Bien que les valeurs de Q_0 soient assez variables d'une station à l'autre, on peut tout de même identifier deux comportements distincts suivant la position des stations par rapport au fossé Rhénan. Les stations allemandes situées à l'Est du Fossé Rhénan, KIZ et SWS, se caractérisent par des valeurs plus faibles de Q_0 de l'ordre de 350, tandis que celles situées à l'Ouest du Fossé Rhénan, ECH, HAU, HIN et MEZF, présentent en moyenne des valeurs beaucoup plus élevées de l'ordre de 490. Une telle différence de comportement pourrait s'interpréter comme une différence « locale » de l'hétérogénéité du milieu. Cependant le massif des Vosges et celui de la Forêt Noire sont constitués de roches de nature assez similaire qui possèdent très probablement le même degré d'hétérogénéité. Il pourrait plutôt s'agir d'un effet du Fossé Rhénan. En effet, les ondes enregistrées sur les stations allemandes ont traversé le bassin Rhénan. Outre une fracturation importante du milieu, caractéristique d'un fossé d'effondrement, ce dernier est composé de plusieurs milliers de mètres d'épaisseur de roches sédimentaires de nature variée : séries évaporitiques, détritiques, etc... Il s'agit donc d'un milieu très hétérogène, très probablement caractérisé par une forte atténuation donc un plus faible Q_0 . Ainsi, les faibles valeurs de Q_0 enregistrées aux stations KIZ et SWS ont très probablement été acquises lors de leur traversée du fossé Rhénan. Pour confirmer cette hypothèse, il faudrait bien sûr estimer des valeurs de Q_0 faibles sur l'ensemble du réseau allemand.

Enfin, on remarquera que les valeurs obtenues à partir du modèle diffusif sont inférieures à celles obtenues avec le modèle en simple scattering. Le modèle diffusif donne donc des résultats plus proches de l'estimation sur les ondes Lg faites par (Campillo et Plantet, 1991), que le modèle en simple scattering.

IV.8 Choix de la fenêtre de coda traitée

Comme nous l'avons déjà vu la déconvolution à phase minimale ne permet pas d'éliminer le bruit des signaux traités. Donc, si l'on veut estimer la vraie fonction du mouvement sismique il faudra ne traiter que la partie du signal présentant un rapport signal sur bruit assez fort pour que l'influence de ce dernier soit négligeable. D'autre part, les modèles décrivant l'évolution énergétique du champ d'ondes de la coda au cours du temps ne sont valables qu'à partir du moment où la décroissance de l'énergie est indépendante de la distance épacentrale. Ces deux conditions vont nous permettre de déterminer respectivement la fin et le début de la fenêtre de coda optimale pour une estimation de la fonction par déconvolution à phase minimale.

Ainsi, afin de déterminer l'instant initial de traitement de notre algorithme de déconvolution semi-aveugle à phase minimale, nous avons représenté pour différentes bandes de fréquence le comportement de l'enveloppe énergétique du signal de coda (Figure IV-12). Ces enveloppes énergétiques sont calculées à partir de l'amplitude du signal analytique associé aux signaux filtrés par un banc de filtres très sélectifs du même type que celui utilisé pour la détermination de $Q_C(\omega)$ (cf. Chapitre 3). Comme nous le montre la Figure IV-12, quelque soit la bande de fréquence observée, l'ensemble des signaux acquiert une décroissance similaire de l'énergie du signal de coda 95 secondes après le déclenchement du séisme. Néanmoins, la station SWS est pratiquement 2 fois plus éloignée de l'épicentre que les autres stations. Ainsi, contrairement à SWS, les enregistrements des stations ECH, KIZ, HAU, HINF et MEZF présentent un comportement similaire de leur coda dès 65 secondes. Afin d'utiliser le maximum d'information à notre disposition, nous avons donc choisi de commencer à traiter les signaux de coda des stations ECH, KIZ, HAU, HINF et MEZF, 65 secondes après le déclenchement du séisme, contre 95s pour la station SWS. L'estimation de l'amplitude spectrale de la fonction source sera donc calculée grâce à l'autocorrélation d'un signal de coda 30s plus long et présentant un meilleur rapport signal sur bruit que celui de SWS.

En ce qui concerne la durée du signal de coda, nous avons calculé la variation au cours du temps du rapport signal sur bruit observé sur la composante verticale de nos enregistrements. Comme on peut le voir sur la Figure IV-13, mis à part l'enregistrement effectué à la station ECH, dont le rapport signal sur bruit est supérieur à 3 sur l'ensemble de la bande plus de 200s après le séisme, l'ensemble des stations présente dès 150s un rapport signal sur bruit inférieur à 3 sur la bande de fréquence 6-10Hz. Ainsi, pour ne traiter que l'information relative à la source sismique nous nous sommes intéressés, qu'aux ondes qui se sont propagées durant moins de 150s à l'intérieur de la terre.

Ainsi, en ce qui concerne les stations ECH, KIZ, HAU, HINF et MEZF, nous avons traité une fenêtre de 85s débutant 65s après le séisme, au lieu d'une fenêtre de seulement 45 s de la coda de SWS prise 95s après le séisme.

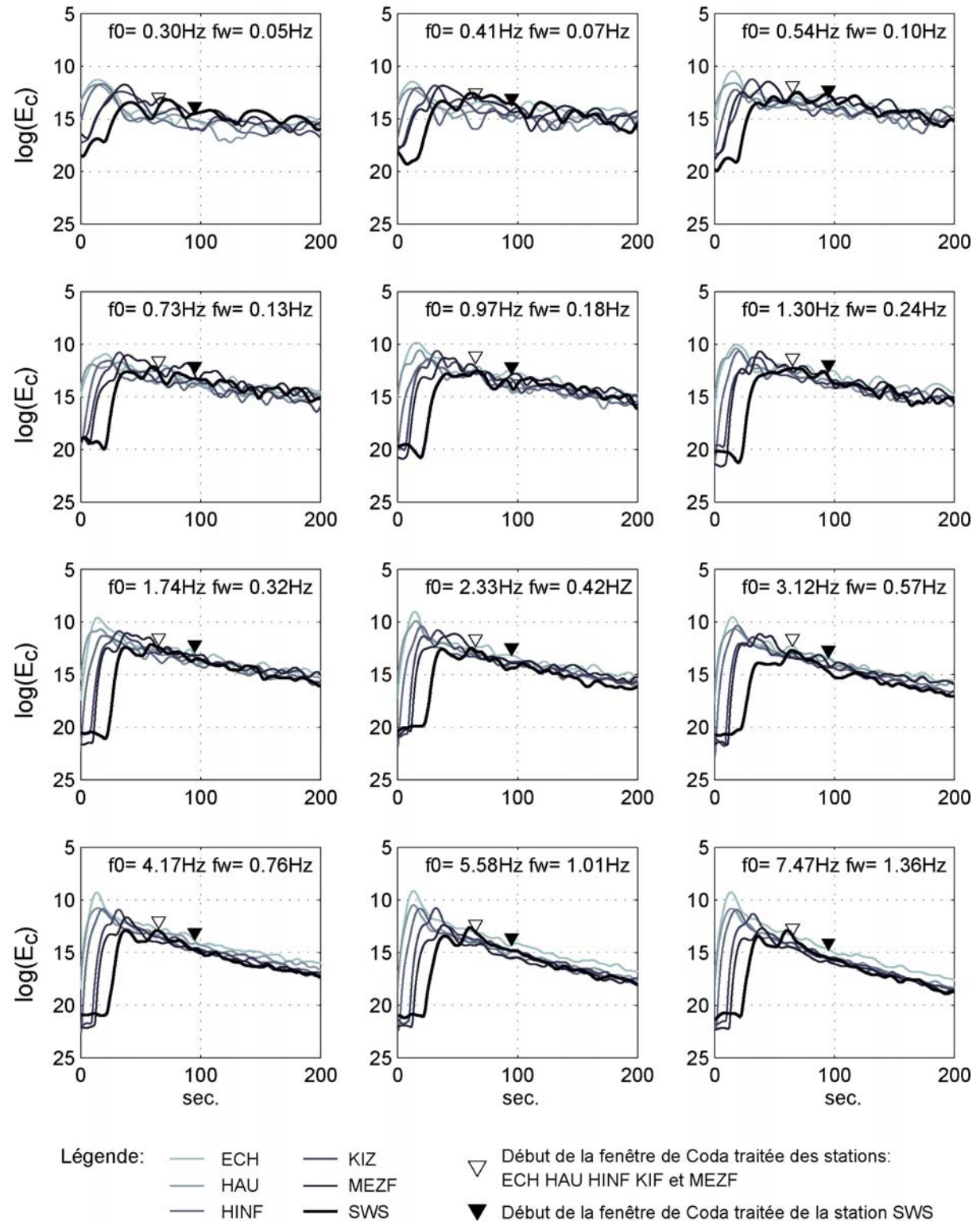


Figure IV-12 : Enveloppe énergétique du signal de coda observé sur les stations ECH, HAU, HINF, KIZ, MEZF et SWS, pour différentes bandes de fréquence.

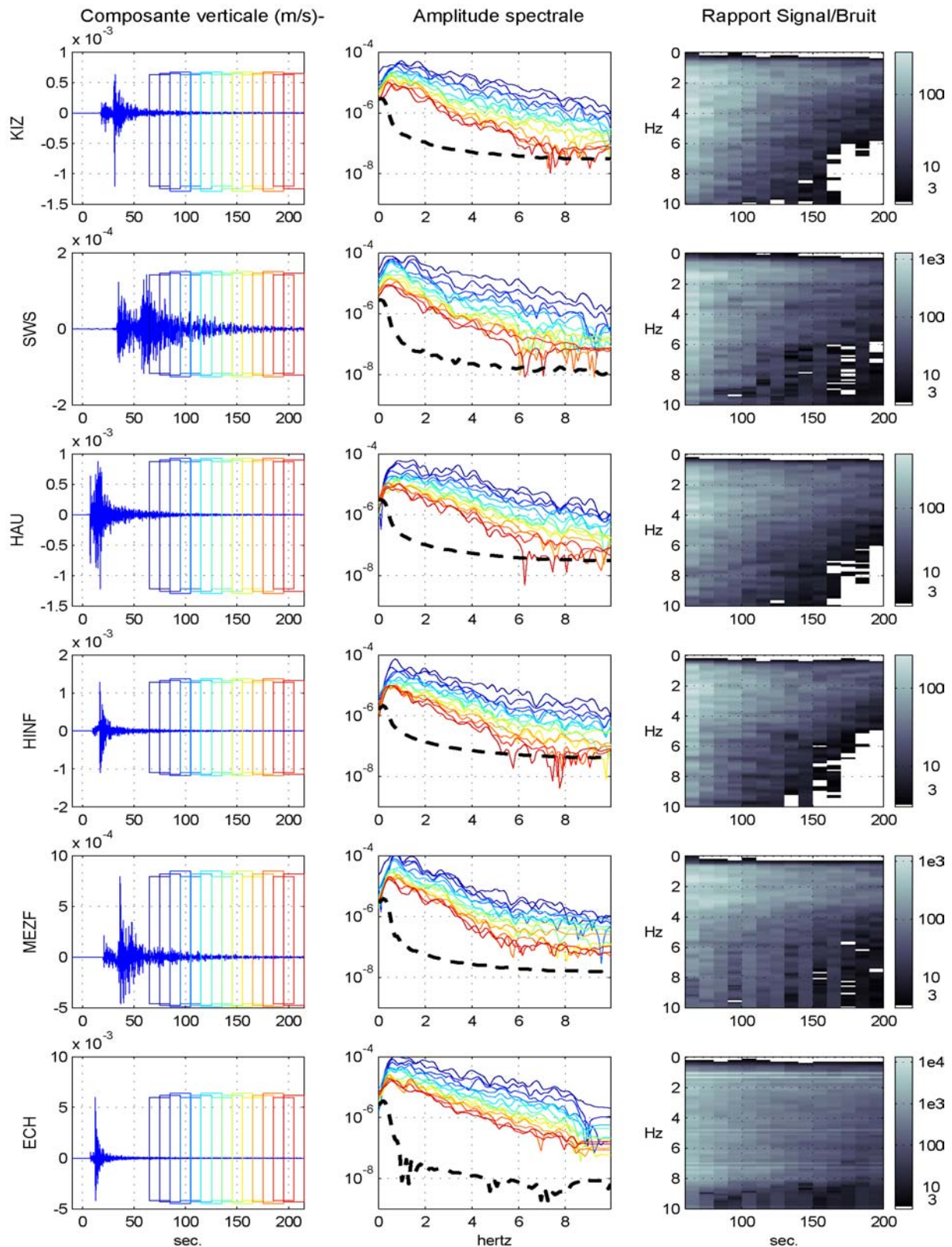


Figure IV-13 : Etude de l'évolution temporelle du rapport signal sur bruit des composantes verticales des enregistrements du séisme de Rambervillers-Saint-Dié. La colonne de gauche représente la répartition temporelle des différentes fenêtres de signal de 20s dont on a calculé l'amplitude spectrale (colonne centrale). L'amplitude spectrale en pointillé représente l'amplitude d'une fenêtre de bruit située avant l'arrivée des ondes P. La colonne de droite représente le rapport spectral entre le signal de coda et le

bruit. Nous n'avons représenté que les points temps-fréquences pour lesquels le rapport signal sur bruit est supérieur à 3.

IV.9 Estimation de l'ondelette source à phase minimale du séisme de Rambervillers

IV.9.1 Algorithme d'estimation

L'algorithme que nous avons utilisé afin d'obtenir l'équivalent à phase minimale de la fonction source du mouvement sismique se décompose en quatre étapes successives (Figure IV-14) :

- Une étape de stationnarisation du signal de coda par un algorithme similaire à celui utilisé pour le Kursk et dont l'objectif est de corriger les signaux de coda du terme d'atténuation non stationnaire :

$$A_c(t, f) = \frac{1}{t} e^{-\frac{\pi f t}{Q_c(f)} + i\varphi_{\min}(t, f)} \quad \text{avec} \quad \varphi_{\min}(t, f) = TH \left(\log \left(\left| \frac{1}{t} e^{-\frac{\pi f t}{Q_c(f)}} \right| \right) \right) \quad (\text{IV-48})$$

Nous avons choisi de donner au filtre d'atténuation une phase minimale par analogie à ce qui est couramment pratiqué en ce qui concerne l'atténuation intrinsèque (Aki et Richards, 1980).

- Une étape d'intégration du signal de coda stationnarisé de façon à obtenir le déplacement du sol précédé d'une opération de filtrage passe-haut $f_c=0.3$ par un butterworth d'ordre 1, pour éviter l'amplification du bruit de fond sismique. D'autre part dans le but de supprimer une éventuelle tendance très basse fréquence engendrée par l'intégration nous avons soustrait à chaque signal un polynôme d'ordre deux dont les coefficients ont été estimés par moindres carrés.
- Une étape d'extraction de la forme d'onde « source » du signal de coda en déplacement par estimation spectrale et utilisation des relations de Bode-Bayard. D'autre part, lors de l'estimation spectrale, nous avons apodisé les autocorrélations du déplacement du sol par une fenêtre de Parzen d'une durée totale de 12 secondes de manière à minimiser le niveau résiduel dans la bande coupée, ici aux hautes fréquences, lié à la troncature des signaux. D'une façon générale, la fenêtre de Parzen de demi largeur τ_M est de la forme (Max et Lacoume, 1996):

$$f_a(t) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{|\tau|}{\tau_M}\right)^2 + 6\left(\frac{|\tau|}{\tau_M}\right)^3 & |\tau| \leq \tau_M/2 \\ 2\left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_M}\right)^3 & \tau_M/2 < |\tau| < \tau_M \end{cases} \quad (\text{IV-49})$$

- La dernière étape consiste, quant à elle, à normaliser cette ondelette source de façon à l'exprimer en terme de taux de moment sismique.

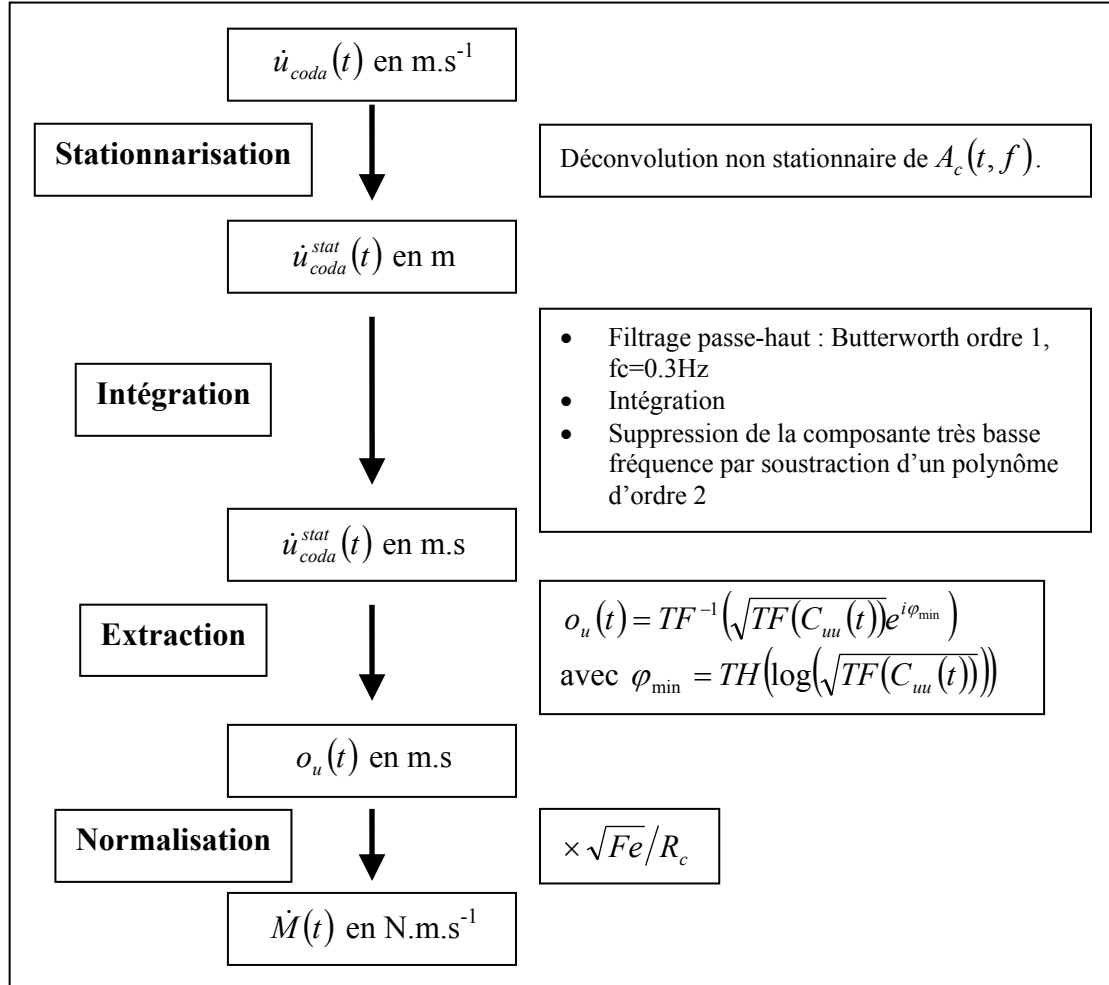


Figure IV-14 : Principales étapes de l'algorithme de déconvolution à phase minimale de la fonction source du mouvement sismique ; F_e est la fréquence d'échantillonnage des signaux.

IV.9.2 Calcul du taux de moment sismique

D'après les expressions de la densité spectrale d'énergie du signal de coda (Chapitre 3), et en utilisant l'expression²⁹ suivante de la densité spectrale de puissance de la source $W(\omega)$ (Aki et Richards, 1980) :

$$W(\omega) = \frac{\omega^4 |M(\omega)|^2}{10\pi\rho\beta^5} \quad (\text{IV-50})$$

la densité spectrale de puissance du signal de coda peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\langle |u_i(t, f)|^2 \rangle_T = |\dot{M}(f)|^2 |R_c(f)|^2 |A_c(t, f)|^2 \quad (\text{IV-51})$$

où suivant le modèle choisi $|R_c(f)|^2$ et $|A_c(t, f)|^2$ prennent les valeurs suivantes :

	Simple Scattering	Modèle diffusif
$ R_c(f) ^2$	$\frac{g_\pi(f)}{15\pi^2 \rho^2 \beta^7}$	$\frac{2}{15\pi \rho^2 \beta^5 (4\pi l^* \beta/3)^2}$
$ A_c(t, f) ^2$	$\frac{1}{t^2} e^{-\frac{2\pi f t}{Q_c(f)}}$	$\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{2\pi f t}{Q_c(f)}}$

Où ρ est la masse volumique du milieu (kg.m⁻³), β correspond à la vitesse des ondes S dans la croûte (m.s⁻¹), l^* représente quant à lui le libre parcours moyen de transport (m) correspondant à la distance de propagation des ondes sismiques à partir de laquelle elles perdent la mémoire de leur direction de propagation initiale. $g_\pi(f)$ correspond au coefficient de rétro-diffusion du milieu (back scattering coefficient) (m⁻¹). En première approximation, nous avons considéré d'une part, que la diffusion dans la croûte est isotrope donc $g_\pi(f) = g_0(f)$, d'autre part, que la loi statistique définissant la distribution spatiale des diffracteurs à l'intérieur de la croûte est une loi de type exponentielle. Ainsi pour une telle distribution spatiale, g_0 devient indépendant de la fréquence :

$$g_0(f) \approx \frac{1}{l} \approx \frac{1}{l^*} \quad (\text{IV-52})$$

où l correspond au libre parcours moyen dans le milieu (m) que nous considérerons par ailleurs égal au libre parcours moyen de transport l^* .

²⁹ Ici on néglige les effet de directivité. $W(\omega)$ représente alors l'intégrale sur l'ensemble des angles solides du flux de densité d'énergie du champ d'onde S rayonnée par une dislocation, dont la transformée de Fourier du moment sismique est $M(\omega)$.

Nous avons utilisé les valeurs moyennes de vitesse des ondes S et de densité obtenues par (Perrier et Ruegg, 1973) à partir d'une étude de sismique réfraction dans le centre de la France (Tableau ci-dessous). Par ailleurs, nous avons utilisé l'estimation du libre parcours moyen de transport fourni par (Lacombe et al., 2003) grâce à une étude comparée de la forme des enveloppes de coda simulées et observées sur des enregistrements sismique régionaux Français.

Vitesse onde S	Densité ρ	Libre parcours moyen de transport l^*
3.5 km.s ⁻¹	2900 Kg.m ⁻³	250 km

Ainsi après stationnarisation et intégration du signal de coda en vitesse, la densité spectrale de puissance du déplacement du sol prend la forme suivante :

$$\left\langle |u_i(f)|^2 \right\rangle_T = |\dot{M}(f)|^2 |R_c|^2 \quad (IV-53)$$

Puisque nous sommes maintenant en présence de signaux stationnaires, la valeur moyenne de la densité spectrale de puissance du mouvement du sol s'exprime directement en fonction de son autocorrélation :

$$\left\langle |u_i(f)|^2 \right\rangle_T = TF(C_{uu}(t)) \quad (IV-54)$$

où, avec une hypothèse d'ergodicité du mouvement sismique, $C_{uu}(t)$ est de la forme :

$$C_{uu}(\tau) = E[u(t)u(t+\tau)] \stackrel{\text{ergodicité}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt \stackrel{\text{signaux numériques}}{\Leftrightarrow} C_{uu}(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(k)u(k+n) \quad (IV-55)$$

En remplaçant dans l'équation (IV-53) la densité spectrale moyenne du déplacement du sol par sa valeur en (IV-54), l'amplitude spectrale du taux de moment sismique prend la forme suivante :

$$|\dot{M}(f)| = \frac{1}{|R_c|} \sqrt{TF(C_{uu}(t))} \quad (IV-56)$$

La déconvolution aveugle à phase minimale consiste alors à donner à cette amplitude spectrale une phase calculée par les relations de Bode-Bayard :

$$\varphi_{\min}(f) = TH(\log(|\dot{M}(f)|)) \quad (IV-57)$$

où TH est la transformée de Hilbert.

L'ondelette source à phase minimale du mouvement sismique est alors obtenue par transformée de Fourier inverse de l'amplitude spectrale du taux de moment sismique reconstitué à partir des relation (IV-56) et (IV-57) :

$$\dot{M}(t) = \frac{1}{|R_c|} TF^{-1} \left(\sqrt{TF(C_{uu}(t))} e^{i\varphi_{\min}(f)} \right) \quad (IV-58)$$

Puisque nous travaillons avec des signaux échantillonnés, nous utiliserons donc une version numérique de cette équation, obtenue en remplaçant respectivement les opérateurs de Transformée de Fourier TF et de transformée de Fourier inverse TF^{-1} par les opérateurs $1/F_e * FFT$ et $F_e * FFT^{-1}$ où F_e est la fréquence d'échantillonnage des signaux. L'équivalent numérique de l'équation (IV-58) est alors de la forme suivante :

$$\dot{M}(n) = \frac{\sqrt{F_e}}{|R_c|} FFT^{-1} \left(\sqrt{FFT(C_{uu}(n))} e^{i\varphi_{\min}} \right) \quad (IV-59)$$

Le taux de moment sismique sera donc obtenu après normalisation par $\sqrt{F_e}/|R_c|$ de l'ondelette « source » à phase minimale du déplacement du sol $o_u(n)$ (Figure IV-14). Le moment sismique est alors calculé par simple intégration de la source du mouvement sismique $\dot{M}(t)$ (voir équations IV-13, IV-23 et IV-24).

Enfin, on peut vérifier que l'expression (IV-59) du taux de moment sismique est bien homogène à des $N.m.s^{-1}$. En effet, en se plaçant en simple scattering, l'ondelette « source » du déplacement du sol stationnarisée $o_u(n)$ est homogène³⁰ à des m.s, $\sqrt{F_e}$ à des $s^{-1/2}$, et $1/|R_c|$ à des $N.s^{-3/2}$, ce qui nous donne bien des $N.m.s^{-1}$. On peut effectuer un raisonnement analogue avec le modèle diffusif pour lequel l'ondelette « source » du déplacement du sol stationnarisé $o_u(n)$ est homogène à des $m.s^{3/4}$, $\sqrt{F_e}$ à des $s^{-1/2}$, et $1/|R_c|$ à des $N.s^{-5/4}$, ce qui nous donne de nouveau des $N.m.s^{-1}$.

IV.9.3 Fonction source à phase minimale du séisme de Rambervillers

Nous avons donc appliqué l'algorithme d'estimation précédent à toutes les composantes des différentes stations que nous avons sélectionnées. La Figure IV-15 présente les formes d'onde des fonctions sources que nous avons obtenues à partir des composantes verticales des enregistrements du séisme de Rambervillers. Nous avons calculé les fonctions sources à partir

³⁰ En effet, l'opération de stationnarisation qui consiste à déconvoluer le signal de coda de la composante non stationnaire $A_c(t,f)$, est équivalente d'un point de vue des unités à une multiplication par des secondes s (inverse du terme $1/t$ de $A_c(t,f)$) ou par $s^{3/4}$ (inverse du terme $1/t^{3/4}$ de $A_c(t,f)$) pour le modèle en simple scattering ou le modèle diffusif respectivement.

soit d'un modèle en simple scattering (Trait plein), soit à partir du modèle diffusif (Trait en pointillés).

Comme on peut le voir, l'ensemble des solutions que nous avons obtenues, excepté MEZF, sont toutes quasiment nulles au-delà de 2s. On retrouve donc bien une des propriétés caractéristiques de la fonction source du mouvement sismique à savoir qu'il s'agit d'un signal à durée finie.

Cependant, nous avons perdu la propriété de positivité de la fonction source du mouvement sismique. En effet, comme on peut le remarquer sur (Figure IV-15), toutes les ondelettes présentent un lobe négatif plus ou moins marqué dont l'amplitude correspond environ à 30% voire 50% de l'amplitude du pic maximal.

Si on s'intéresse maintenant aux caractéristiques spectrales de ces fonctions sources, on retrouve bien la décroissance haute fréquence en ω^{-2} caractéristique de la fonction source d'un tremblement de terre (Modèle de Brune, modèle de Haskell, etc...). Malheureusement à basse fréquence en dessous de 0.3 Hz, en raison du filtrage passe haut effectué avant l'intégration de la vitesse de déplacement du sol (Figure IV-14), l'amplitude spectrale de nos ondelettes ne tend pas vers une valeur constante, correspondant au moment sismique. Or, pour des raisons d'amplification du bruit microsismique basse fréquence lors de l'opération d'intégration, il nous est impossible de supprimer le filtrage passe haut des signaux. Ainsi plutôt que de supprimer cette opération de filtrage, nous avons donc essayé de quantifier son effet sur les ondelettes que nous avons estimées.

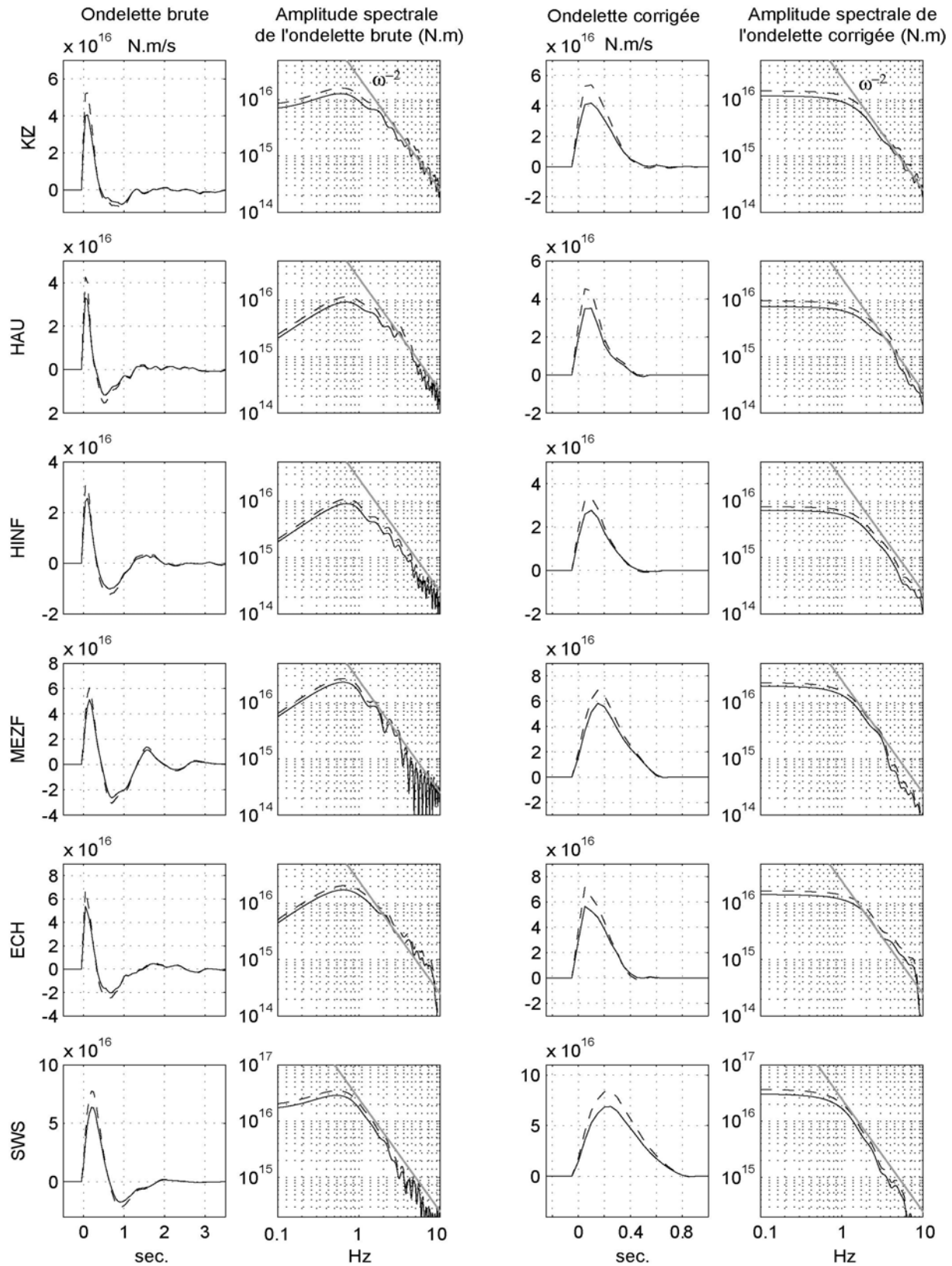


Figure IV-15 : Ondelette source de coda à phase minimale de la composante verticale. En trait plein solution obtenue à partir d'un modèle en simple scattering, en trait pointillé solution du modèle diffusif ; les deux colonnes de gauche forme d'onde et amplitude spectrale des ondelettes brutes, les deux colonnes de droite : forme d'onde et amplitude spectrale des ondelettes corrigées de l'effet du filtrage passe haut.

On a choisi 3 types d'ondelettes positives: une ondelette de Hanning, une ondelette de type Haskell et une ondelette à phase minimale (Figure IV-16-a, courbes en pointillées). Nous avons tracé en trait plein (Figure IV-16-a) les trois ondelettes obtenues après filtrage par un filtre de Butterworth d'ordre 1 de fréquence coin de 0.3Hz similaire à celui que nous avons utilisé lors de notre traitement. Comme on peut le voir les ondelettes synthétiques filtrées présentent aussi un lobe négatif qui représente environ 50% de l'amplitude du pic principal. Ainsi le filtrage passe haut des signaux de coda est donc responsable bien évidemment de l'altération du comportement basse fréquence des ondelettes sources estimées mais va engendrer un lobe négatif parasite en fin d'ondelette. Néanmoins, comme on peut le voir sur la Figure IV-16-a), la forme générale de l'ondelette reste inchangée, en première approximation, comme si on lui avait soustrait une fonction affine de la forme :

$$y = at + b \quad (IV-60)$$

entre l'instant $t=0$ et l'instant où l'ondelette source atteint sa valeur minimale. Nous avons donc corrigé nos ondelettes filtrées d'une fonction affine, dont les coefficients a et b sont calculés de manière à ramener à zéro sa valeur minimale. Au-delà de sa valeur minimale, les valeurs de l'ondelette source sont mises à zéro.

Comme on peut le voir sur la Figure IV-16-b, l'ondelette corrigée est dans l'ensemble assez proche de l'ondelette initiale. Néanmoins, il persiste tout de même une erreur résiduelle que nous allons essayer de quantifier, notamment en étudiant son influence sur la valeur du moment sismique.

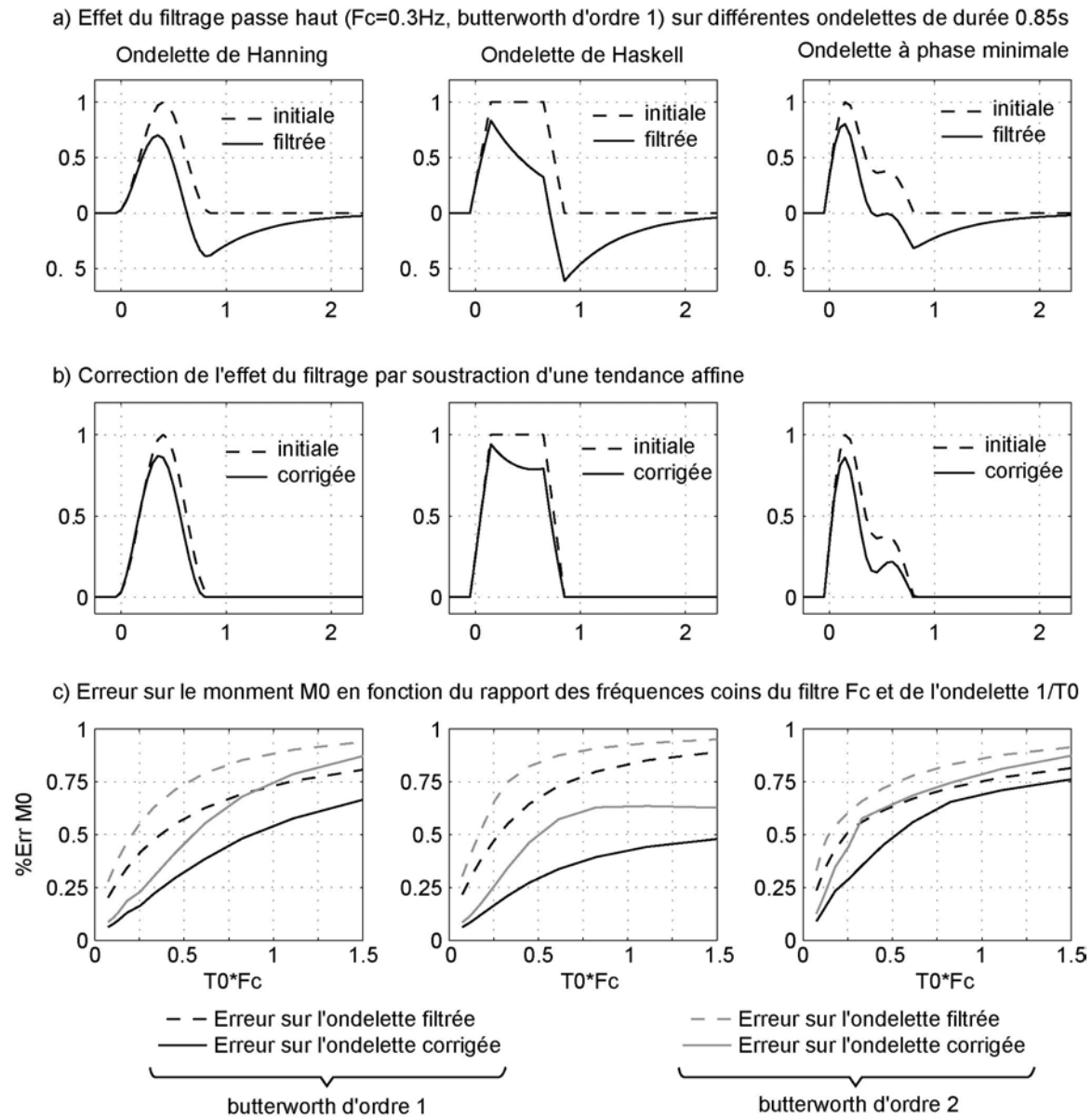


Figure IV-16 : Etude et correction de l'erreur engendrée sur le moment sismique par filtrage passe-haut ($F_c=0.3\text{Hz}$) de type butterworth d'ordre 1 ou d'ordre 2.

Puisque, ce dernier correspond à l'intégrale de la fonction source du mouvement sismique (paragraphe IV.2.2.1), nous avons donc calculé l'intégrale de la partie positive de nos ondelettes synthétiques avant et après correction affine. La Figure IV-16-c présente en fonction du paramètre sans dimension $T_0 F_c$, l'erreur générée sur le moment que nous avons normalisé par rapport au moment de l'ondelette synthétique initiale. T_0 et F_c représente respectivement la durée de l'ondelette synthétique et la fréquence coin du filtre de Butterworth. Comme on peut le voir (Figure IV-16-c), l'opération de correction par une fonction affine permet de diminuer, d'environ un facteur 2, l'erreur sur l'estimation du moment sismique. D'autre part, cette erreur est d'autant plus faible que $T_0 F_c$ est faible, ou si on préfère, cette erreur est d'autant plus faible que la durée de l'ondelette est faible comparée

à la période propre $T_c=1/F_c$ du filtre. Après avoir corrigé l'ensemble de nos ondelettes (Figure IV-15) du séisme de Ramberviller par une fonction affine, celles-ci présentent maintenant une durée de l'ordre de 0.5 ± 0.025 s sauf SWS qui durent 0.8 ± 0.025 s. Pour notre étude, T_0F_c est donc de l'ordre de 0.12, puisque la durée des ondelettes que nous avons estimées est de l'ordre de 0.5 ± 0.025 s tandis que la fréquence coin du filtre passe haut est de 0.3Hz. Ainsi comme nous le montre (Figure IV-16-c), l'erreur due au filtrage passe haut sur le moment sismique après correction affine des ondelettes est donc inférieure à 10%.

Ainsi, nous avons donc corrigé nos ondelettes du bruit sismique par un algorithme en deux étapes. Tout d'abord, le filtrage passe-haut nous a permis de supprimer l'effet du bruit basse fréquence dans l'ondelette temporelle estimée. Ensuite, la correction affine sur l'ondelette temporelle, nous a permis de rétablir la limite basse fréquence, constante jusqu'à la fréquence coin, de l'ondelette source sismique tout en évitant de réamplifier le bruit microsismique. Cette correction affine peut donc être assimilée d'une certaine manière à une opération de filtrage non linéaire nous permettant d'éliminer, de la fonction source estimée par déconvolution à phase minimale, l'effet du bruit microsismique.

	Moment sismique pour le modèle en simple scattering (N.m)					
Composante	KIZ	HAU	HINF	MEZF	ECH	SWS
Z	1.17e+016	7.81e+015	6.93e+015	1.94e+016	1.43e+016	2.76e+016
N	1.13e+016	-	-	1.14e+016	1.63e+016	2.84e+016
E	1.40e+016	-	-	1.47e+016	1.66e+016	2.85e+016

	Moment sismique pour le modèle diffusif (N.m)					
Composante	KIZ	HAU	HINF	MEZF	ECH	SWS
Z	1.44e+016	9.87e+015	8.06e+015	2.24e+016	1.66e+016	3.34e+016
N	1.50e+016	-	-	1.29e+016	1.92e+016	3.45e+016
E	1.74e+016	-	-	1.67e+016	1.91e+016	3.44e+016

En effet, comme on peut le voir sur la Figure IV-17 représentant les ondelettes obtenues sur les différentes directions des capteurs 3 composantes KIZ, ECH, MEZF et SWS, la

composante verticale de la station MEZF a une ondelette source différente de celles obtenues sur ses composantes horizontales. Alors que les ondelettes horizontales sont quasiment nulles dès 1s, la composante horizontale présente des oscillations sur pratiquement 3s, suggérant soit un comportement défectueux de la composante verticale du capteur, soit la présence d'un effet de site affectant uniquement le champ d'onde vertical. Ainsi, nous considérerons dans ce qui va suivre uniquement les composantes horizontales de la station MEZF dont la durée est de 0.5 ± 0.025 s contre 0.6 ± 0.025 s pour la composante verticale. De plus, mis à part la station MEZF, les ondelettes sources retrouvées sur les 3 composantes d'un même capteur sont très similaires entre elles.

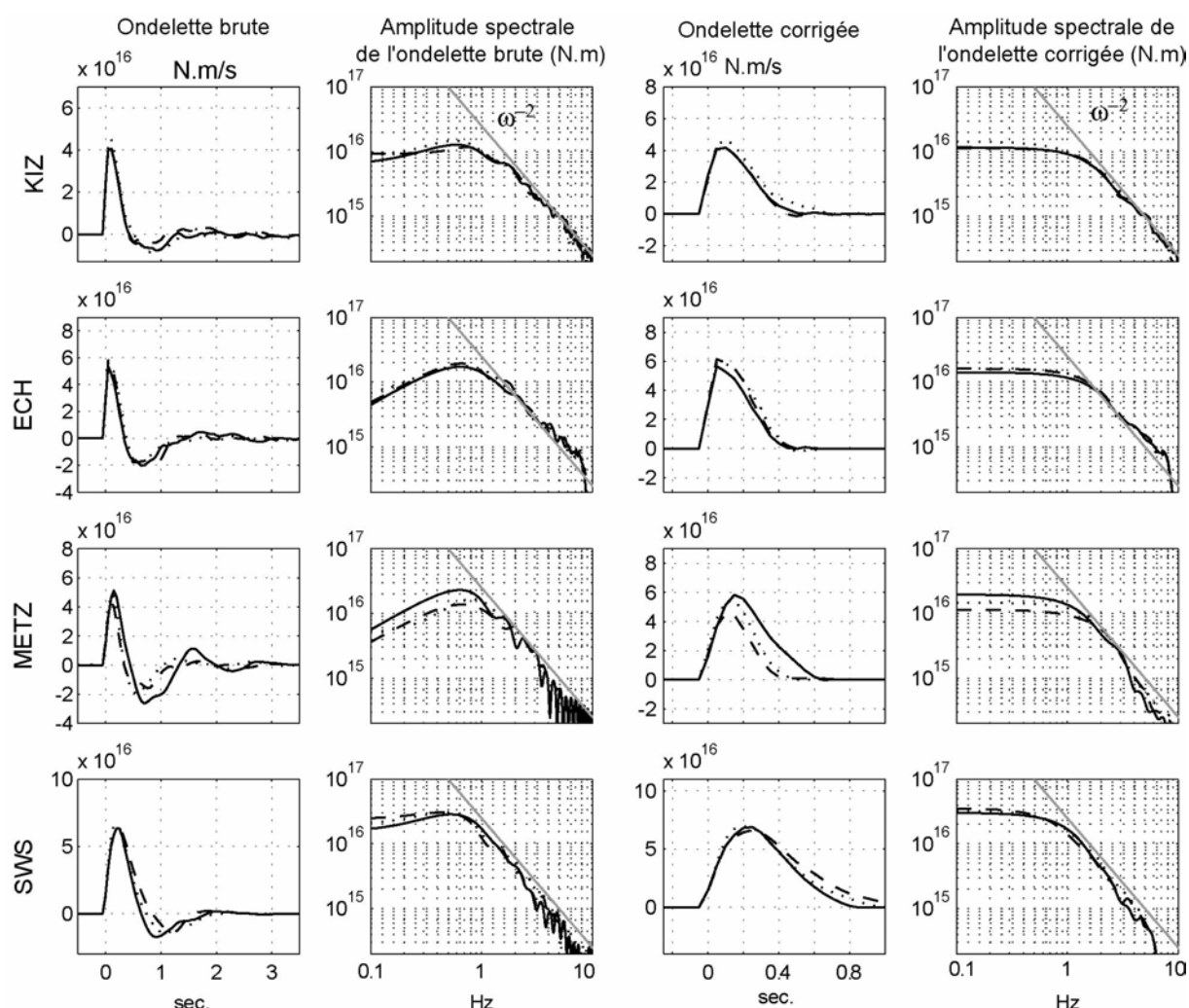


Figure IV-17 : Ondelette source de coda à phase minimale sur les 3 composantes des sismomètres : trait plein (—) composante verticale, trait pointillé large (---) composante Nord, trait pointillé fin (...) composante Est; les deux colonnes de gauche : forme d'onde et amplitude spectrale des ondelettes brutes, les deux colonnes de droite : d'onde et amplitude spectrale des ondelettes corrigées de l'effet du filtrage passe haut.

En ce qui concerne la durée « excessive » (deux fois plus importante !) de l'ondelette de SWS comparée à ce que l'on observe sur les autres stations, elle ne peut pas s'expliquer simplement

par un effet de directivité. Il pourrait plutôt s'agir d'un effet de propagation des ondes à l'intérieur du fossé Rhénan. En effet, comme on peut le voir sur la Figure IV-10, les ondes qui arrivent à la station SWS ont traversé le Fossé Rhénan longitudinalement, il n'est donc pas impossible que le contenu basse fréquence du champ d'ondes soit amplifié par des réverbérations multiples à l'intérieur du bassin. Très approximativement, on peut considérer que le Fossé Rhénan est rempli par des sédiments tertiaires avec une épaisseur moyenne de l'ordre de 1.5 km (Villemin et al., 1986), dont la vitesse des ondes S est de l'ordre de 1.6 km/s (en considérant $V_s \approx V_p/\sqrt{3}$ avec $V_p = 2.8$ km/s) (Mueller et al., 1973). La fréquence fondamentale d'un tel bassin est donc de l'ordre de 0.26Hz, pouvant très bien expliquer une amplification anormale du spectre de l'ondelette source en dessous de 1Hz.

Enfin, d'un point de vue spectral, la correction des ondelettes par une droite affine est bénéfique puisqu'elle a rétabli l'asymptote horizontale à basse fréquence sans altérer la décroissance haute fréquence en ω^{-2} .

Ainsi afin de valider les valeurs de durée obtenues par déconvolution à phase minimale du signal de coda, nous avons estimé la fonction du mouvement sismique par une autre méthode très couramment utilisée en sismologie : la déconvolution par fonction de Green empirique.

IV.9.4 Comparaison avec la fonction source estimée par fonction de Green Empirique

D'une façon analogue à (Mueller, 1985), nous avons estimé la fonction source du séisme de Rambervillers par déconvolution d'une fonction de Green empirique. Comme c'est souvent le cas pour les études de source (Frankel et al., 1986; Zollo et al., 1995; Baumont et al., 2002), nous avons utilisé comme fonction de Green une des répliques de l'événement étudié. N'ayant pas un accès direct aux données du réseau allemand et les courtes périodes du LDG ayant saturé, nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux enregistrements des répliques effectuées à la station ECH. Nous avons sélectionné comme fonction de Green empirique la première réplique survenue quelques minutes après l'événement principal, c'est-à-dire un séisme de magnitude 3.4 à 20h54 le 22 février 2003. D'un point de vue localisation comme on peut le voir sur Figure IV-18-a), cette réplique, même si elle est excentrée par rapport à l'épicentre de l'événement principal, présente l'avantage d'être centrée par rapport à la répartition spatiale de l'ensemble des répliques. Or comme celles-ci nous donnent une image du plan de glissement de la faille, on peut donc supposer que d'un point de vue position source/station, elle constituera une bonne fonction de Green.

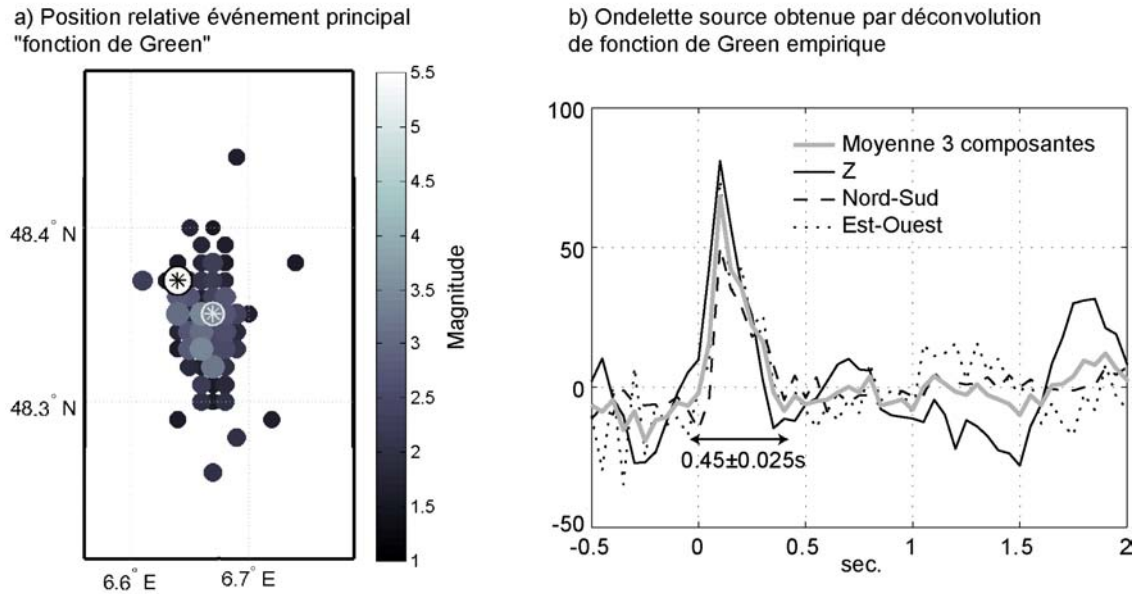


Figure IV-18 : Ondelette source du séisme de Ramberviller obtenue par fonction de Green Empirique.

D'un point de vue magnitude, puisque l'ensemble des répliques de la séquence sismique de Ramberviller n'a pas dépassé une magnitude 3.4, la réplique que nous avons choisie est donc l'un des événements sismiques, de magnitude inférieure d'au moins 1° par rapport à l'événement principal, présentant le meilleur rapport signal sur bruit à notre disposition.

Enfin, la similarité des formes d'ondes de l'événement principal et celle de la réplique choisie comme fonction de Green empirique que ce soit en terme de polarité ou de forme générale (Figure IV-19), nous permet de considérer que les mécanismes au foyer de ces deux événements sont très proches.

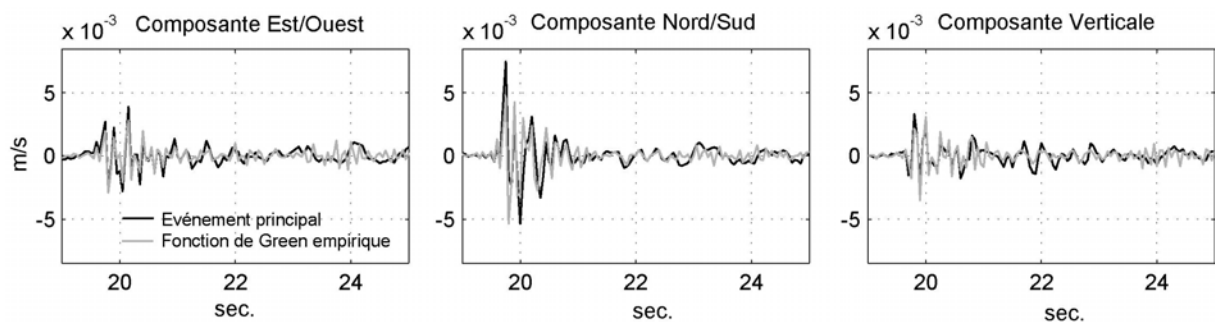


Figure IV-19 : Formes d'ondes du train d'ondes S du séisme de Rambervillers et de la réplique choisie comme fonction de Green empirique.

Nous avons donc effectué la déconvolution d'une fenêtre de 7s des arrivées directes des ondes S de l'événement principal par une fenêtre similaire des ondes S de la réplique. Nous avons stabilisé la déconvolution par une procédure de water level en prenant $\mu=1\%$.

La Figure IV-18-b) présente les ondelettes sources obtenues sur chacune des trois composantes de la station ECH, ainsi que l'ondelette source moyenne (trait gris). Comme on peut le voir, elles ont toutes une durée de l'ordre de 0.45 ± 0.025 s, inférieure de 0.05s à la durée que nous avons obtenue par déconvolution à phase minimale du signal de coda. Une telle différence peut être associée à la durée non nulle de la fonction source de la fonction de Green empirique. En effet, en toute rigueur, la méthode de la fonction de Green empirique estime en fait la fonction source de l'événement principale déconvoluée de celle de l'événement servant de fonction de Green. Par conséquent, d'après les propriétés du produit de convolution, la fonction source que l'on estimera par cette méthode aura une durée inférieure à la vraie fonction source, la différence correspondant à la durée de la source de l'événement servant de fonction de Green empirique. Ainsi, en utilisant la relation (IV-40) du modèle de Brune et en considérant que la durée de la rupture est de l'ordre de $\tau = R/v$, celle-ci peut s'exprimer directement en fonction de la chute de contrainte $\Delta\sigma$ et du moment sismique M_0 suivant la relation :

$$\tau = \frac{1}{v} \sqrt[3]{\frac{7M_0}{16\Delta\sigma}} \quad (\text{IV-61})$$

où v est la vitesse de rupture sur la faille que nous prendrons égale à 0.9β ($\beta=3500$ m/s).

Pour calculer la durée de la fonction source de la fonction de Green empirique, il nous faudra tout d'abord en estimer son moment à partir de sa magnitude grâce à la relation moment-magnitude de Kanamori (Kanamori 1977) :

$$\log_{10} M_0 = 1.5M_w + 9.1 \quad (\text{IV-62})$$

Ainsi, le moment sismique associé à la fonction de Green que nous avons choisie, d'une magnitude 3.4 est de l'ordre de 1.6×10^{14} N.m. Enfin, en considérant qu'il s'agit d'un séisme intraplaque dont la chute de contrainte est de l'ordre de 100bars (Kanamori et Anderson, 1975), on obtient une durée de la fonction source de notre fonction de Green de l'ordre de 0.05s ce qui confirme ainsi les valeurs obtenues par déconvolution à phase minimale sur le signal de coda.

Maintenant que nous venons de vérifier que la déconvolution à phase minimale du signal de coda nous permet d'estimer la durée de la fonction source du séisme de Ramberviller, nous allons voir si elle est aussi capable de nous donner une estimation valable du moment sismique.

IV.9.5 Directivité et Moment sismique des fonctions sources à phase minimale.

En simple scattering, la coda sismique peut être considérée comme une somme aléatoire de diffractions sur des hétérogénéités du milieu. Ces « points diffractants » étant répartis de façon aléatoire autour de la source sismique, on pourrait donc s'attendre à ce que l'ondelette estimée à partir du signal de coda corresponde à une sorte d'ondelette moyenne de la fonction source apparente sur toutes les directions autour de la zone de rupture. Par conséquent, on ne devrait donc pas observer d'effet de directivité sur les fonctions sources que nous estimons par déconvolution non-stationnaire à phase minimale du signal de coda.

Nous avons donc dans un premier temps, calculé le moment sismique associé aux ondelettes de chaque station en utilisant soit un modèle en simple scattering (Tableau 1), soit un de type diffusif (Tableau 2). Comme on peut le voir, les valeurs du moment sismique obtenues par ces deux modèles sont assez proches les unes des autres, même si le modèle diffusif donne des valeurs de 15% à 20% supérieures à celles obtenues à partir du modèle en simple scattering. On distingue trois niveaux de moment sismique différents. Le moment sismique obtenu sur les trois composantes des stations KIZ, MEZF et ECH (exceptée la composante verticale de MEZF) est en moyenne de 1.38×10^{16} N.m pour le modèle en simple scattering contre 1.64×10^{16} N.m pour le modèle diffusif. Les stations situées au Sud de l'épicentre présentent quant à elles un moment sismique pratiquement deux fois plus faible, tandis que la station SWS, située au Nord, a un moment sismique pratiquement deux fois plus important que celui observé sur les stations KIZ, MEZF et ECH. Ces différences de comportement du moment sismique semblent être associées à la position de la station par rapport à la faille, nous laissant supposer qu'elles sont dues à un effet de directivité. En effet, comme on peut le voir sur la Figure IV-10, les stations KIZ, MEZF et ECH sont toutes trois situées dans une direction perpendiculaire au plan de faille contraire aux stations HINF, HAU et SWS qui sont plutôt situées dans l'axe de la faille. Néanmoins, comme nous l'avons vu pour le modèle de Haskell, la directivité de la fonction source du mouvement sismique se traduit par une variation de sa durée et de son amplitude, tandis que le moment sismique reste constant. Ce comportement paradoxal des ondelettes sources que nous avons estimées est flagrant lorsque l'on compare sur un même graphique leur variation en terme de forme et d'amplitude en fonction de l'azimut (Figure IV-20). En effet, puisque la répartition des répliques nous indique que la rupture s'est propagée du Nord vers le Sud, les stations HAU, HINF devraient présenter des fonctions plus étroites et d'amplitude plus forte que celles observées au Nord. Si on s'intéresse à l'étroitesse de la fonction source, comme on peut le voir sur la (figure b), HAU

présente bien une ondelette plus étroite que celle observée sur KIZ MEZF ou ECH. SWS est bien la plus large des ondelettes mais, comme nous l'avons déjà dit, une telle augmentation de durée est très probablement due à un effet de propagation plus qu'à un effet de directivité. Or même si en terme de durée ou plutôt d'étalement de la fonction source, on observe un comportement assez cohérent avec la théorie, il n'en est pas de même pour la variation des amplitudes de ses ondelettes. En effet, les ondelettes directives (HINF et HAU) ont une amplitude inférieure à l'ondelette antidirective (SWS) (Figure IV-20-a).

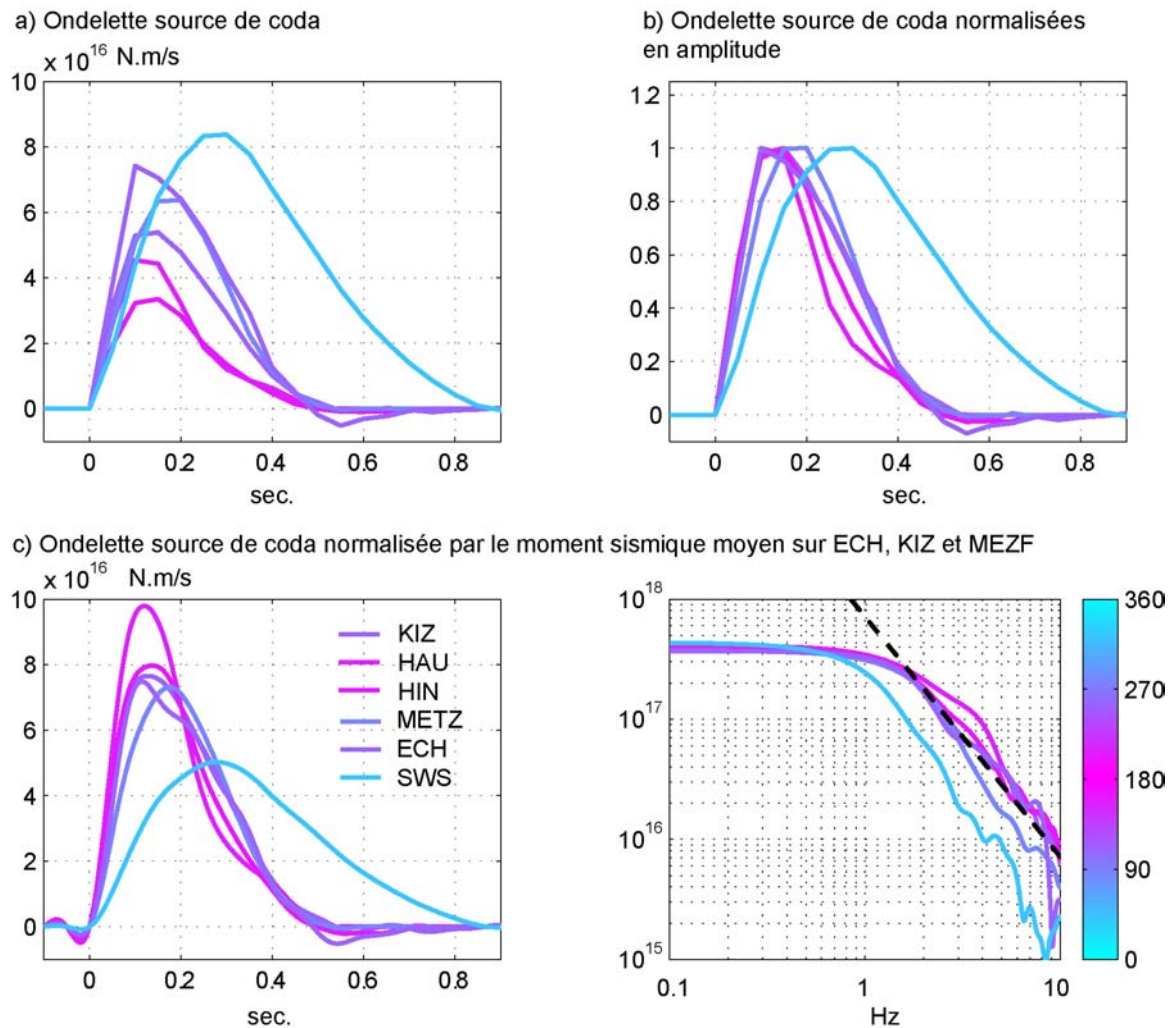


Figure IV-20 : Directivité de l'ondelette source à phase minimale de coda obtenue à partir d'un modèle diffusif.

Par analogie au comportement directif classique, on peut supposer que les ondelettes source de coda, enregistrées dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de la rupture, ne présente pas d'effet de directivité. Elles devraient donc correspondre à la vraie fonction source sismique avec une valeur du moment sismique correcte. C'est d'ailleurs ce que l'on observe puisque la valeur moyenne du moment sismique des stations KIZ, MEZF et ECH, de l'ordre de 1.64×10^{16} N.m pour le modèle diffusif, est identique à la valeur proposée

par Zurich. Le modèle en simple scattering quand à lui fournit une valeur de 1.38×10^{16} N.m inférieure de l'ordre 16% à celle du modèle diffusif.

Nous sommes donc en présence d'un comportement paradoxal dont il est encore difficile de comprendre l'origine. Nous allons tout de même donner quelques pistes d'investigation.

Une première piste consiste à évoquer les résultats de (Sato, 1984) sur le comportement directif de l'enveloppe énergétique des sismogrammes d'un milieu hétérogène. En effet, il nous montre que, suivant la composante à laquelle on s'intéresse, et en fonction de l'azimut d'observation et du mécanisme au foyer de l'événement, l'enveloppe énergétique du signal de coda n'a pas la même amplitude. Un tel comportement modifie donc l'amplitude apparente du moment sismique et pourrait être à l'origine du comportement directif anormal que nous observons. Pour le vérifier, il nous faudrait, soit comparer les amplitudes des différentes composantes des capteurs présentant un comportement directif atypique HAU et HINF, malheureusement ils s'agit de capteurs une composante ; soit on calcule directement les coefficients C_Z , $C_{Est/Ouest}$ et $C_{Nord/Sud}$ de partition de l'énergie sur les différentes composantes du sismomètre en utilisant la relation (80) de l'article (Sato, 1984).

Enfin, deux autres possibilités pourraient être : soit la présence d'effets de site, soit une modification du libre parcours moyen l^* . Cette dernière proposition paraît peu probable étant donné que le moment sismique dépend de la racine carré de l^* , et donc, qu'une variation d'un facteur 2 sur le moment implique une variation du libre parcours moyen de transport l^* d'un facteur 4 en l'espace de quelques kilomètres, ce qui paraît peu réaliste.

Ainsi, même si la prudence est de rigueur puisque nous n'avons en notre possession qu'un nombre limité d'enregistrements, contrairement à toute attente, le spectre de la fonction source du signal de coda semble comporter des effets de directivité se caractérisant par une modification de la largeur spectrale de la fonction source. Cependant, d'un point de vue amplitude absolue, on observe un comportement atypique que nous n'avons pas encore expliqué. D'ailleurs, en considérant que la valeur du moment sismique est de 1.64×10^{16} N.m, nous avons rétabli les amplitudes réelles des ondelettes sources en renormalisant leur moment sismique à 1.64×10^{16} N.m. Comme on peut le voir sur la figure, les ondelettes ainsi corrigées présentent un comportement directif classique où l'ondelette directive HAU est celle qui a la plus grande amplitude. Enfin, les valeurs du moment sismique obtenues par le modèle en simple scattering sont inférieures de 16% en moyenne à la valeur obtenue par inversion du moment sismique (ETHZ) ou celle fournie par le modèle diffusif. Le modèle en

simple scattering ne semble donc pas être adapté d'autant plus que, contrairement à nos hypothèses, on devrait utiliser $l < l^*$, ce qui aurait pour conséquence d'abaisser la valeur du moment sismique obtenue par un modèle en diffusion simple. Il serait par conséquent intéressant de tester différents modèles de diffusion simple en changeant entre autre l'exposant $1/t^\alpha$ du terme d'atténuation, en considérant par exemple que la coda est constituée d'ondes de surface avec $\alpha=1$.

IV.9.6 Vitesse de rupture et chute de contrainte

On a vu précédemment que les supports énergétiques d'une ondelette positive et de son équivalent à phase minimale sont quasiment les mêmes. D'une façon analogue, on peut considérer que la durée séparant les maximums d'amplitude de la dérivée temporelle de l'ondelette source à phase minimale est à peu près égale à celle de la vraie ondelette source. Dans ce cas, il est alors possible d'estimer la vitesse de rupture et la chute de contrainte en appliquant la méthode proposée par (Boatwright, 1980).

Cette méthode consiste à tracer le carré de la dérivée temporelle du moment sismique $\ddot{M}(t)^2$. Une estimation du temps de rupture sur la faille est obtenue en mesurant l'écart de temps entre les maximums des deux pulses positifs principaux du carré de la dérivée de l'ondelette source (cf. Figure IV-21). Comme on peut le voir sur la Figure IV-21-c), le deuxième pulse d'énergie de la dérivée de l'ondelette source de la station ECH, présente des oscillations très marquées et probablement associées au filtre anti-aliasing de cette station. Ces oscillations nous empêchant d'estimer avec précision la durée de la rupture, nous avons décidé de ne pas considérer ces données. La Figure IV-21-b présente quant à elle la valeur moyenne obtenue en considérant les pulses d'énergie des stations MEZF et KIZ (exception fait de la composante verticale de MEZF).

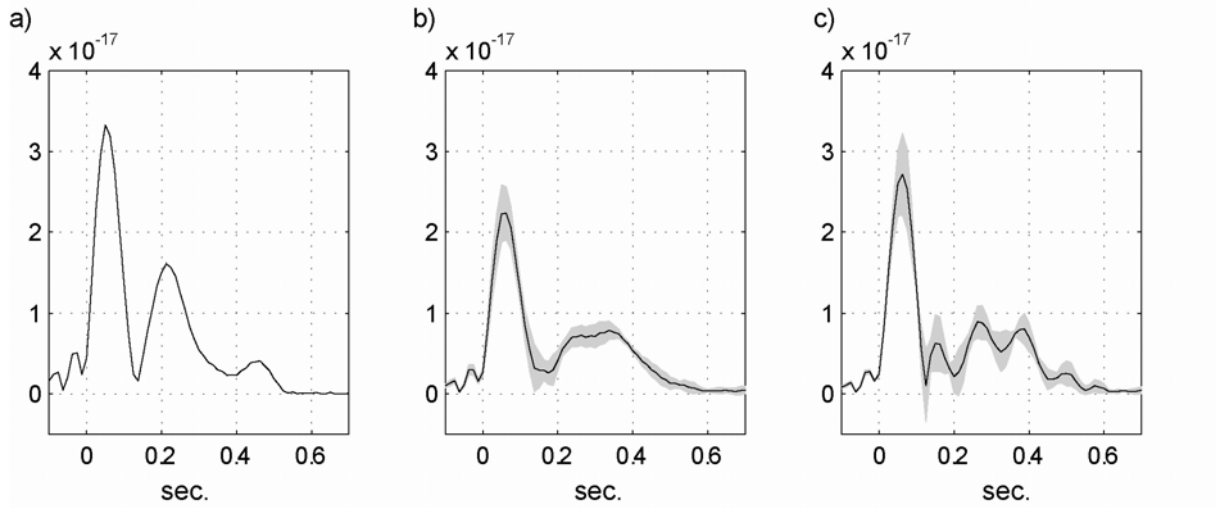


Figure IV-21 : Amplitude au carré de la dérivée seconde du moment sismique $\ddot{M}(t)^2$: a) station HAU ; b) valeur moyenne des différentes composantes des stations MEZF et KIZ (sauf composante verticale de MEZF) ; c) station ECH.

Néanmoins, en raison de l'élargissement du second pulse d'énergie (Figure IV-21-b), l'incertitude sur la mesure de la durée de la rupture, à partir des enregistrements en MEZF et KIZ, sera plus élevée que sur la station HAU. Un tel élargissement, même si il peut être spécifique à la fonction source étudiée, peut très bien être dû au passage à la phase minimale, ou être une conséquence d'un effet de moyennage de différentes fonctions sources apparentes dans le champ d'ondes de coda. Cependant, en ne considérant que la position des valeurs maximales de ces deux pulses, on peut dans un premier temps estimer la vitesse de rupture en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\tau_{1/2}^{90^\circ}}{\tau_{1/2}^{0^\circ}} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (\text{IV-63})$$

obtenue en remplaçant $\tau_{1/2}(90^\circ)$ et $\tau_{1/2}(0^\circ)$ par leur expression respective suivant l'équation suivante (analogue de l'équation (IV-33)) :

$$\tau_{1/2} = \frac{R}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \cos(\theta)\right) \quad (\text{IV-64})$$

où R est le rayon de la source sismique.

Ainsi, avec $\tau_{1/2}(90^\circ) = 0.285 \pm 0.025 \text{ s}$ et $\tau_{1/2}(0^\circ) = 0.165 \pm 0.025 \text{ s}$, on obtient une vitesse de rupture de l'ordre de $2545 \pm 1400 \text{ m.s}^{-1}$. En utilisant l'équation précédente on obtient une dimension de la faille de l'ordre de $725 \pm 463 \text{ m}$ correspondant à une chute de contrainte de l'ordre de 188 bars (l'erreur sur cette mesure est très grande à cause de la puissance au cube!)

Si on utilise directement les formules de Brune concernant la chute de contrainte et le lien fréquence coin/dimension de la rupture, on obtient avec une fréquence coin $f_c = 1.34 \pm 0.05 \text{ Hz}$, une chute de contrainte de $78 \pm 23 \text{ bars}$.

IV.10 Extraction des effets de site

IV.10.1 Qu'est ce que les effets de site ?

En raison de l'action conjuguée de la tectonique et de l'érosion, la terre est beaucoup plus hétérogène en surface qu'en profondeur. En effet, plus de 75% des roches à la surface de la terre sont des roches sédimentaires ou des dépôts alluviaux. Or, de part leur origine (dépôt de matériels plus ou moins grossiers dans un contexte fluvial, marin ou même éolien), ces roches sont moins consolidées, moins compactes, et donc d'impédance plus faible que les roches sur lesquelles elles reposent. Les ondes sismiques sont alors piégées à l'intérieur de ces structures de subsurface (cf. Figure IV-3, partie effet de site). Ces structures sédimentaires de sub-surface jouent en quelque sorte le rôle de filtre amplifiant et modifiant le contenu spectral du mouvement sismique en fonction de leur géométrie et de leur nature. Ces amplifications locales du mouvement sismique sont appelées en sismologie des effets de site. D'un point de vue du risque sismique, ces effets de site vont par conséquent amplifier le pouvoir destructeur d'un séisme comme par exemple lors du séisme de Michoacan, à Mexico en 1985 (Singh et al., 1988) ou plus récemment lors du séisme de Kobé (Furumura et Koketsu, 1998). Dans un but de prévention, il est par conséquent primordial de pouvoir correctement quantifier ces effets de sites.

IV.10.2 Les méthodes d'estimation

D'un point de vue « mathématique », l'action de ces effets de site sur le mouvement sismique se traduit, d'après l'équation (IV-17), par un produit de convolution :

$$u(t) = S(t) * p(t) * h(t)$$

Ainsi, estimer $h(t)$ ne consiste en quelque sorte qu'à déconvoluer le signal sismique enregistré en un site donné $u(t)$ par le signal sismique incident $P(t) * S(t)$ sur ce site. Le problème est que l'on ne connaît pas ces effets de source et de propagation. Initialement introduite par (Borcherdt, 1970), une méthode classique d'estimation du signal sismique incident, consiste à considérer que celui-ci nous est fourni par le signal sismique enregistré en un site « au rocher », appelé site de référence. L'hypothèse fondamentale de cette méthode est que le site de référence situé sur le substratum rocheux est constitué de roche de forte impédance, et que par conséquent, il ne présente pas d'effet de site : $h_{\text{rocher}}(t) \approx \delta(t)$.

Initiée par (Langston, 1979) avec les fonctions récepteur, puis appliquée par (Lermo et Chavez-Garcia, 1993) aux effets de site, une autre méthode consiste à estimer ces effets de site en effectuant le rapport spectral de la composante horizontale par rapport à celui de la composante verticale (H/V). Cette méthode considère implicitement que le signal sismique sur la composante verticale est insensible aux conditions de site : $h_{\text{vertical}}(t) \approx \delta(t)$. En effet, en première approximation, on peut considérer que le mouvement sismique sur la composante verticale est essentiellement composé d'onde P, pour lesquelles les contrastes d'impédance entre les différentes structures géologiques du milieu sont souvent moins forts que pour les ondes S (essentiellement enregistrées sur les composantes horizontales). Les effets de site seront donc beaucoup plus marqués sur les ondes S que sur les ondes P. Ils seront donc plus visibles sur les composantes horizontales que sur la composante verticale. Ainsi, en considérant, que le champ vertical comporte les mêmes effets de source et de propagation, on peut donc espérer qu'il nous fournira une bonne approximation de l'effet de site. Enfin, cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter de station supplémentaire de référence au rocher comme la méthode précédente.

Enfin, même si nous ne l'utiliserons pas dans notre étude, il existe aussi une troisième méthode permettant d'accéder à la fréquence fondamentale de résonance de site : la méthode du rapport H/V bruit de fond. Cette méthode, initiée par (Nakamura, 1989) consiste à effectuer le rapport spectral du signal de bruit de fond sismique enregistré sur les composantes horizontales par celui enregistré sur la composante verticale (Bard, 1998).

IV.10.3 Le modèle 1D

De par leur mode de mise en place ces structures sédimentaires sont souvent composées d'une alternance de couches de nature et de propriétés mécaniques différentes. L'exemple le plus classique de structure géologique pouvant engendrer des effets de site est celui du bassin sédimentaire ((cf. Figure IV-3, partie effet de site), où une dépression du substratum rocheux est remplie par un empilement de couches horizontales. Ainsi, exception faite des situations où ces dépôts sédimentaires ont été remaniés par des mouvements tectoniques et en négligeant les effets de bord, ces bassins sédimentaires peuvent être modélisés en première approximation par un système à une dimension, constitué d'une succession de couches horizontales planes.

D'une part, comme nous le montrent les algorithmes de simulation de type Thomson-Haskell ou de type « lumped system » (Goupillaud, 1961; Kunetz et D'Erceville, 1962), la réponse sismique de tels systèmes se caractérise par des phénomènes de résonance à des fréquences

arrangées en harmoniques. En effet, si on considère le cas simple d'une couche sédimentaire reposant sur un substratum rocheux, on peut montrer de manière analytique que le piégeage des ondes SH associées aux réflexions multiples entre les deux interfaces de cette couche sédimentaire, amplifie certaines fréquences du champ d'ondes sismiques (Figure IV-22).

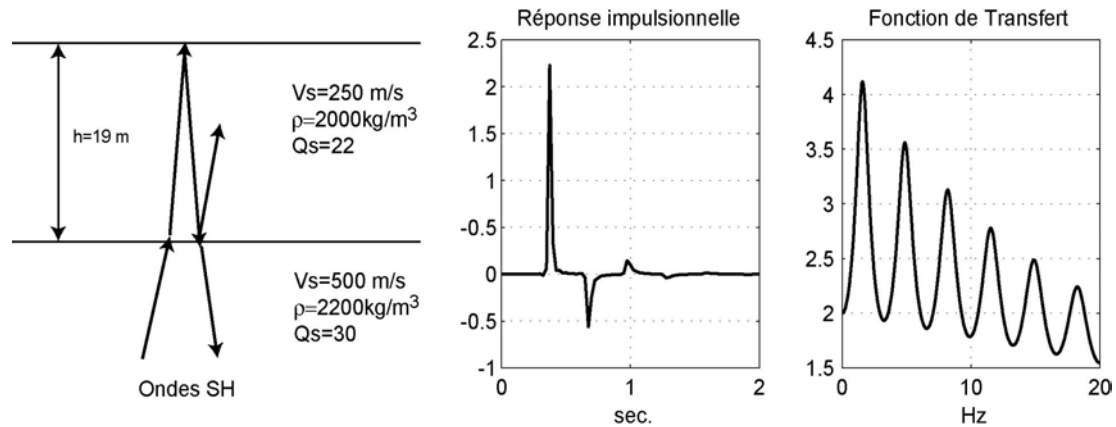


Figure IV-22 : Réponse d'une couche à une onde SH : la réponse impulsionnelle comporte les pulses associés aux réflexions à l'intérieur de la couche et la fonction de transfert présente quant à elle des pics de résonance.

Ainsi pour les ondes SH on peut montrer que ces fréquences sont réparties en harmoniques suivant la formule :

$$f_n = (2n+1) \frac{\beta}{4h} \quad (\text{IV-65})$$

où β est la vitesse des ondes S dans la couche, h son épaisseur et n un entier variant de 0 à $+\infty$.

D'autre part, s'inscrivant dans une philosophie inspirée par le travail de Robinson (Robinson, 1954; Robinson, 1957; Robinson, 1967) sur la déconvolution prédictive des signaux sismologiques pour la prospection pétrolière, (Sherwood et Trorey, 1965) montrèrent que la fonction de transfert en transmission « verticale » d'un système de couches planes est à phase minimale. Ainsi, en utilisant les relations de Bode-Bayard (Chapitre 1), la seule connaissance de l'amplitude spectrale de la fonction de transfert de l'effet de site, générée par une succession de couches horizontales planes, nous permettra d'en calculer la phase et donc sa réponse impulsionnelle temporelle par transformée de Fourier inverse.

IV.10.4 Objectifs de l'étude des effets de site

Jusqu'à présent, les méthodes d'estimation des effets de site, pour des problèmes de cohérence entre les signaux utilisés, ne s'intéressent qu'à l'amplitude spectrale $|H(f)|$ de la fonction de transfert de ces effets de site. En effet, comme nous l'ont montré (Toksöz et al., 1991) grâce à une étude de la cohérence spatiale des ondes Lg, la cohérence du champ

d'ondes sismiques entre deux points dépend de la distance et de la longueur d'onde étudiée. Ainsi, sur une bande de fréquence donnée, ils ont montré qu'en raison du scattering à l'intérieur de la croûte, la cohérence tombe en dessous de 0.5 si la distance entre les deux points d'observation est supérieure à la longueur d'onde étudiée.

Par conséquent, une méthode comme la méthode Site/référence est difficile à mettre en œuvre en terme de déconvolution de la réponse impulsionnelle.

Ainsi, même si du point de vue de l'amplitude du contenu spectral, le champ d'ondes au site de référence comporte la même information que celui du signal incident sur le site, notamment en ce qui concerne les termes de source et de propagation crustale, il n'en est donc pas de même en ce qui concerne leur phase. Il est par conséquent très difficile de pouvoir effectuer une déconvolution spectrale (amplitude et phase) du type site/référence, sans introduire des artéfacts dus aux fluctuations du champ d'ondes sismiques incident régional.

Il en va de même en ce qui concerne la méthode du rapport H/V. D'une part, les composantes verticales et horizontales n'étant pas composées du même type d'onde, elles ne présentent pas toujours des termes de source ou de propagation identiques puisque chacune d'elle s'est générée et propagée de manière différente. D'autre part, la composante verticale présente aussi des effets de site. Apparaissant à des fréquences plus élevées que ceux des composantes horizontales, ils ne nous empêchent pas de déterminer la fréquence fondamentale de résonance du site. Cependant, ils biaiseront toute tentative d'estimation de la réponse impulsionnelle du site, notamment en ce qui concerne ses caractéristiques hautes fréquences.

Notre objectif est d'arriver à extraire une **réponse impulsionnelle (temporelle) moyenne de site** à partir du signal de coda. En effet, l'équation (IV-51) peut aussi s'exprimer de façon à faire apparaître les effets de site :

$$\left\langle |u_i(t, f)|^2 \right\rangle_T = |\dot{M}(f)|^2 |R_c(f)|^2 |H(f)|^2 |A_c(t, f)|^2 \quad (\text{IV-66})$$

où $|H(f)|^2$ représente la densité spectrale de puissance associée à la réponse de site $h(t)$.

Par conséquent, en présence d'effet de site, la méthode de déconvolution aveugle à phase minimale que nous avons utilisée pour estimer la fonction source du mouvement sismique, nous fournira donc une ondelette correspondant à la convolution des équivalents à phase minimale de la fonction source et de l'effet de site. Ainsi, en suivant une idée analogue à la méthode Site/Référence, on peut estimer l'équivalent phase minimale de l'effet de site par

déconvolution Site/Référence de son ondelette de coda. Or comme nous venons de le voir, cet équivalent à phase minimale correspond à la vraie réponse impulsionnelle de site si celui-ci est dû à un empilement de couches horizontales planes.

D'autre part, l'autre intérêt d'utiliser la coda plutôt que les arrivées directes, est que le caractère aléatoire du signal de coda nous permet, par une simple autocorrélation après stationnarisation et correction de Q_{coda} , de supprimer l'effet du terme de propagation de l'estimation de l'effet de site.

Enfin, pour terminer, ajoutons que depuis les travaux de (Phillips et Aki, 1986), cela fait déjà plusieurs années que les effets de site sont étudiés à partir du signal de coda, comme par exemple (Mayeda et al., 1991a; Koyanagi et al., 1992; Bonilla, 2000). Outre le fait que ces méthodes ont été appliquées avec un succès souvent très mitigé, elles ne se sont intéressées jusqu'à présent qu'à l'amplitude spectrale des effets de site. Notre objectif est, au contraire, d'introduire aussi une information sur la phase de ces effets de site.

IV.10.5 Données utilisées

Nous avons utilisé les données enregistrées par le réseau accélérométrique permanent français (RAP). Nous nous sommes intéressés essentiellement aux enregistrements effectués sur 4 des 11 stations du réseau du Fossé Rhénan géré par l'EOST (Strasbourg) : STSM, STBU, STBR et STDM (Figure IV-23).

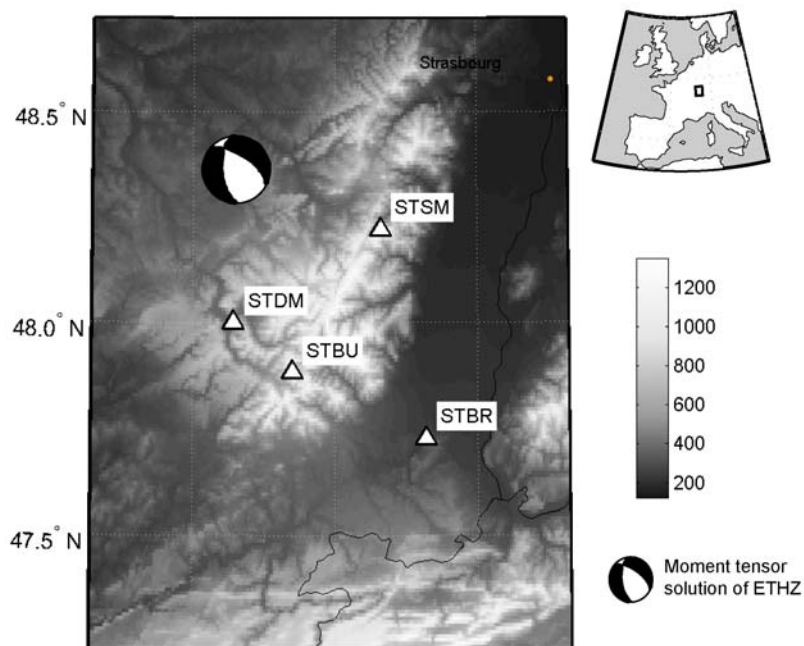


Figure IV-23 : Carte de localisation des stations du RAP utilisées pour l'étude des effets de site.

La station STSM étant située au même endroit que la station ECH du réseau large bande de GEOSCOPE, elle sera considérée comme la station de référence au rocher. Les autres stations STBR, STBU et STDM sont, quant à elles, installées sur des sédiments. Les signaux sismologiques sont enregistrés par des capteurs accélérométriques de type Guralp CMG-5 pour STBU et STSM, et Kinemetrics EpiSensor FBA ES-T pour STDM et STBR, puis numérisés par des modules d'acquisition Titan3 avec une fréquence d'échantillonnage de 125Hz. Ainsi, après une intégration de façon à obtenir des enregistrements en vitesse du mouvement du sol, nous les avons rééchantillonnés à 62.5Hz.

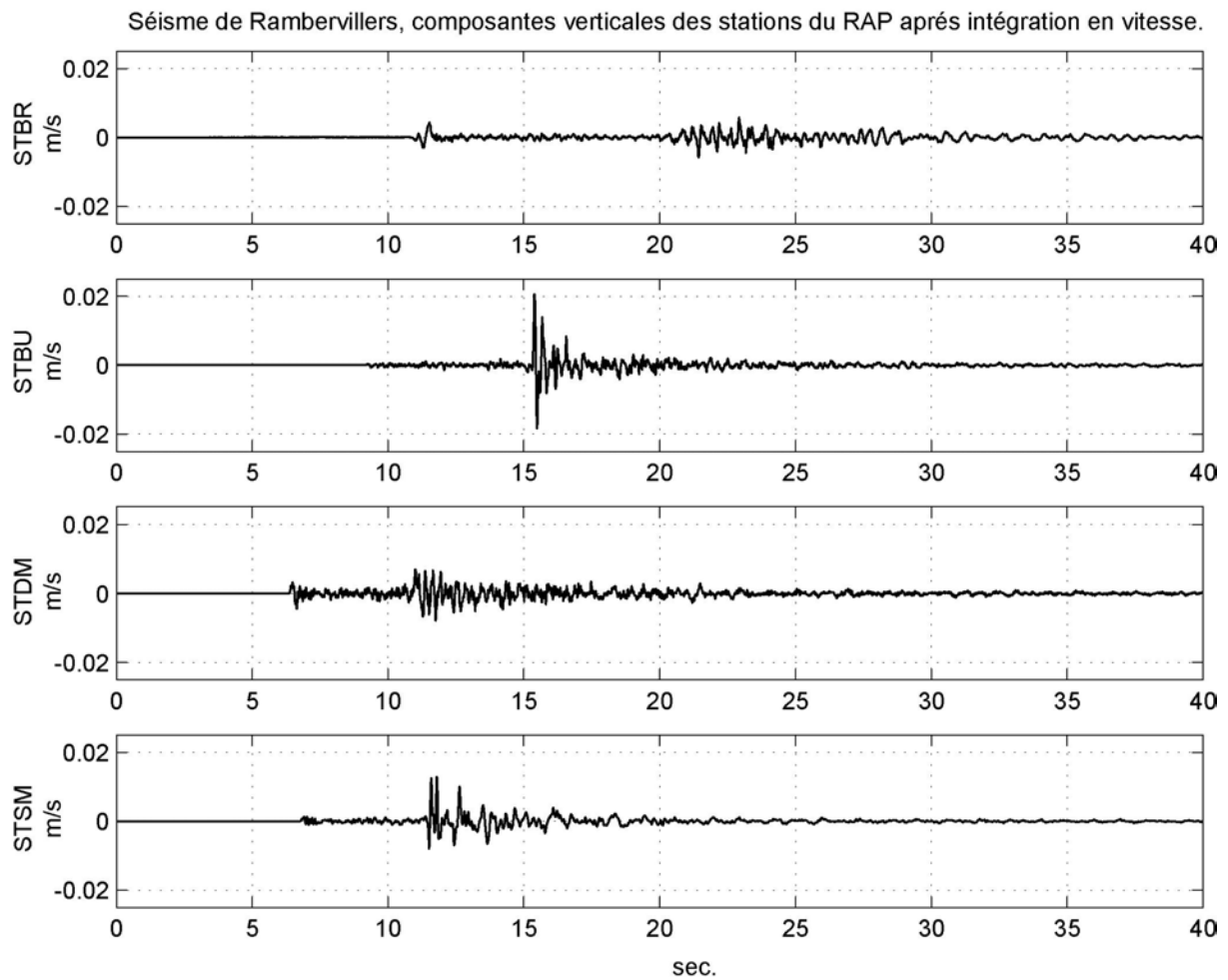


Figure IV-24 : Composante verticale des enregistrements sur les stations STSM, STDM, STBU et STBR du RAP après intégration et sous échantillonnage à 62.5 Hz.

Nous avons donc appliqué un traitement similaire à celui utilisé précédemment pour l'estimation de la fonction source du séisme de Saint-Dié. Cependant, la durée d'acquisition des signaux accélérométriques étant courte, la durée du signal de coda est alors malheureusement inférieure à 60s, rendant impossible une bonne estimation de Q_{coda} . Nous avons donc utilisé les valeurs de Q_0 et α obtenues précédemment (cf tableau). Pour la station STSM nous avons bien sûr utilisé la valeur obtenue à ECH : $Q_0=530$ et $\alpha=0.33$. Pour les

stations STBR, STBU et STDN, celles-ci étant situées plutôt vers les stations HAU et HINF, nous avons utilisé une valeur moyenne des coefficients Q_0 et α sur ces deux stations : $Q_0=467$ et $\alpha=0.425$. Nous avons ainsi calculé les ondelettes sources sur les trois composantes de chacun des accéléromètres STBR, STBU, STDN et STSM du RAP.

IV.10.6 Les Résultats

Comme on peut le voir sur la Figure IV-25, les ondelettes en vitesse que nous avons obtenues après déconvolution à phase minimale du signal de coda, sont différentes d'une station à l'autre. D'autre part, excepté la station STSM (station de référence au rocher), les ondelettes que nous avons estimées, sont aussi différentes d'une composante à l'autre d'un même sismomètre. En effet, les composantes horizontales des stations sur les sédiments sont, non seulement d'amplitudes plus élevées, mais présentent aussi des oscillations plus basse fréquence que celles observées sur leur composante verticale. D'ailleurs, comme on peut le voir sur la colonne de droite de la Figure IV-25, le rapport spectral entre les ondelettes horizontales par rapport à celui des ondelettes verticales montrent une amplification importante du spectre des ondelettes horizontales, autour de 5Hz pour les stations STBR et STDN et autour de 10 Hz pour la station STBU. De telles différences de comportement sont très probablement dues à la présence d'effets de site engendrés par les structures sédimentaires sous les stations.

Ondelette source à phase minimale

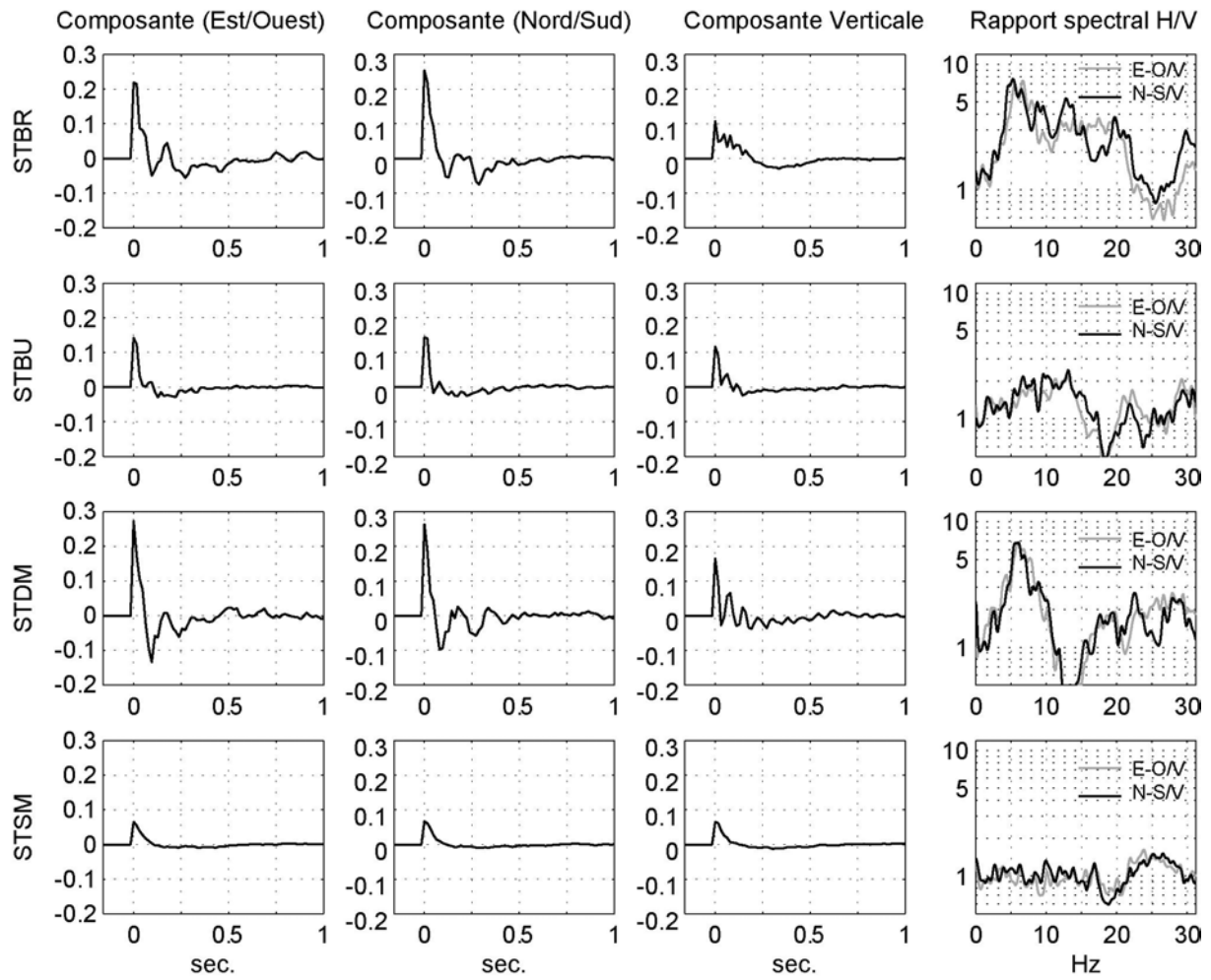


Figure IV-25 : Ondelettes « source » à phase minimale du signal de coda et rapport spectral H/V des enregistrements accélérométriques du séisme de Rambervillers du 22 février 2003.

D'ailleurs, les rapports H/V de la station STSM, quant à eux, sont pratiquement constants, égaux à 1 jusqu'à 17Hz, confirmant ainsi l'absence d'effet de site sur cette station située au rocher.

D'autre part comme on peut le vérifier sur la Figure IV-26, les amplifications observées sur les rapports H/V sont bien dus à des amplifications du spectre des composantes horizontales et ne correspondent pas à des artéfacts dus par exemple à des trous dans le spectre des composantes verticales.

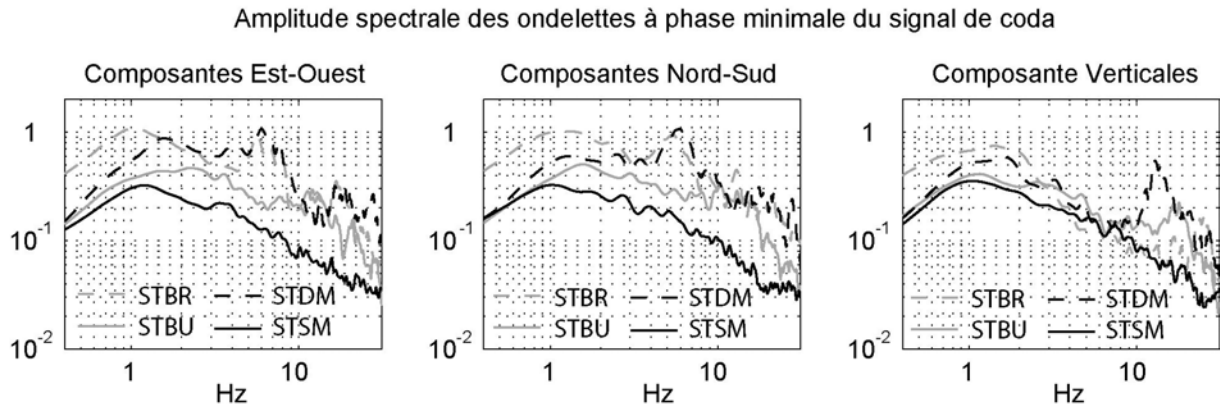


Figure IV-26 : Amplitude spectrale des ondelettes « sources » du séisme de Rambervillers, obtenues après stationnarisation et déconvolution à phase minimale du signal de coda.

Ainsi d'après (IV-66), l'ondelette « source » de coda obtenue en présence d'effet de site est donc la convolution de l'ondelette source à phase minimale de l'événement sismique $o_{source}(t)$ avec l'équivalent à phase minimale $h_{min}(t)$ de l'effet de site :

$$o_{coda}(t) = o_{source}(t) * h_{min}(t) \quad (IV-67)$$

Afin d'extraire les effets de site des ondelettes de coda, nous avons effectué pour chaque composante, la déconvolution de l'ondelette de coda estimée aux stations STBR, STBU et STDM par celle estimée à la station de référence STSM. Comme on peut le voir sur la Figure IV-27, les rapports spectraux H/V et Site/Référence des composantes horizontales des stations STBR et STDM sont très proches, présentant une fréquence fondamentale de résonance de site autour de 6 Hz. De plus, les rapports spectraux des composantes horizontales de ces deux stations STBR et STDM, présentent un deuxième pic autour de 17Hz, dont la position correspond au premier harmonique de la résonance à 6Hz. La présence d'une telle structure en harmonique du spectre de $h_{min}(t)$ confirme, qu'en première approximation, il s'agit très probablement d'un effet de site associé à un modèle stratifié à une couche. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, les réponses impulsionnelles à phase minimale que nous avons obtenues correspondent par conséquent à la réponse impulsionnelle en onde SH du site étudié. En ce qui concerne le comportement des composantes verticales de ces deux stations, on remarque que leur rapport spectral Site/Référence présente aussi un pic d'amplification, mais situé à plus haute fréquence que ceux observés sur les composantes verticales : $f_{0vertical} \approx 25\text{Hz}$ sur STBR et $f_{0vertical} \approx 12.5\text{Hz}$ sur STDM. Un tel comportement est cohérent avec les observations classiques sur les effets de site, à savoir que le signal sur la composante verticale est plutôt composé d'ondes converties en ondes P, se caractérisant par des vitesses de propagation plus élevées, et donc par une fréquence fondamentale de résonance plus forte.

Ainsi, si nous avons la structure géologique sous ces deux stations nous pourrions d'une part vérifier la présence de la couche sédimentaire responsable de l'effet de site et d'autre part, à partir de son épaisseur, calculer la vitesse en onde S ou en onde P, par exemple.

On remarquera néanmoins que les rapport spectraux de la composante Nord-Sud de la station STBR est différente de celui de sa composante Est-Ouest. En effet, celle-ci présente 3 pics d'amplification à 5Hz, 12.5Hz et 22Hz. Il pourrait s'agit d'effet de site 2D (Bard et Bouchon, 1980) ou même 3D.

Enfin, la réponse de site des signaux enregistrés à la station STBU est plus difficile à interpréter puisque chacune des composantes Est-Ouest, Nord-Sud et Verticale présentent une amplification d'un facteur 4 à la fréquence de 12.5Hz, de 15Hz et de 17Hz respectivement. Comme on peut le voir sur la Figure IV-27, il n'y a pas de différence de comportement très nette entre les composantes verticales et horizontales de cette station. Le rapport spectral de la composante Nord-Sud semble même correspondre à un mélange des rapports spectraux des composantes Est-Ouest et Verticale.

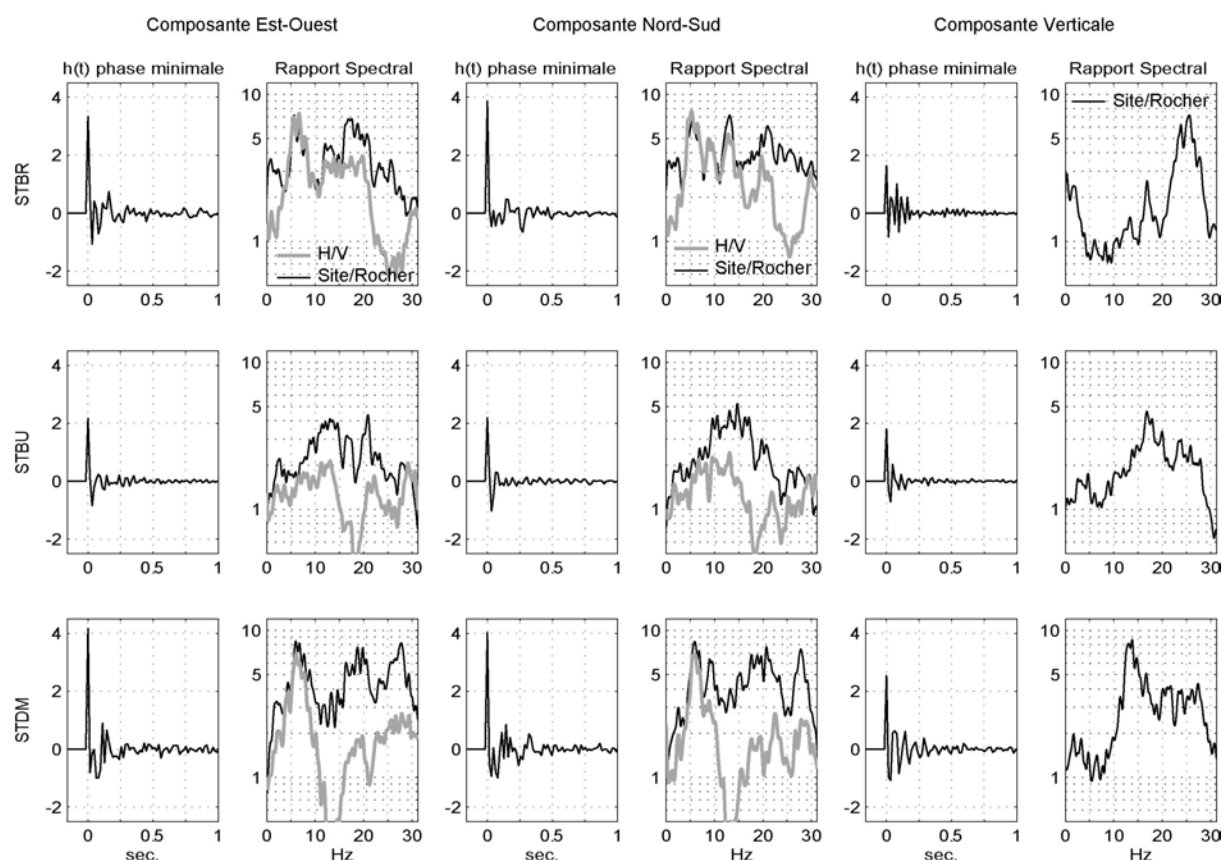


Figure IV-27 : Equivalents à phase minimale de la réponse impulsionnelle des effets de site obtenus par déconvolution Site/Référence des ondelettes du signal coda sur chacune des trois composantes des stations STBR, STBU et STDN.

Enfin, à titre de comparaison avec les méthodes classiques d'évaluation des effets de site, nous avons calculé les rapports spectraux site sur référence et H/V des arrivées directes de chacun des signaux à notre disposition. Après avoir normalisé nos signaux par la distance épacentrale afin d'éliminer l'effet de l'atténuation géométrique, nous avons utilisé une fenêtre de signal de 10s commençant 0.5s avant le début des ondes S.

Comme on peut le voir sur la Figure IV-28, même si les rapports spectraux H/V des stations STBR et STDN, présentent comme sur le signal de coda une fréquence fondamentale autour de 5 Hz, le rapport H/V du site de référence n'est plus constant comme cela devrait être le cas. Un tel comportement de la station de référence pourrait être dû à la présence d'effet de propagation différents sur les 3 composantes du sismomètre. De plus les rapports spectraux Site/Référence, ne présentent plus de pics d'amplification avec une répartition en harmonique. D'autre part, le fait que l'ensemble des signaux montre plutôt une amplification commune autour de 17Hz, est probablement dû à des effets de propagation ou à des effets de source plus qu'à des effets de site.

Ainsi, l'estimation des effets de site à partir des arrivées directes, ne nous permet pas de retrouver les caractéristiques des effets de site obtenus à partir du signal de coda. Il faudrait très probablement pour y parvenir moyenner ces estimations à partir des arrivées directes sur plusieurs événements différents, comme par exemple en effectuant une inversion généralisée (Andrews, 1986). L'estimation par déconvolution à phase minimale du signal de coda, semble donc éliminer tout effet de propagation ou de source. Néanmoins, il nous reste tout de même à vérifier la validité des effets de site que nous avons retrouvés par cette méthode, à partir par exemple, de la connaissance de la structure du sous-sol.

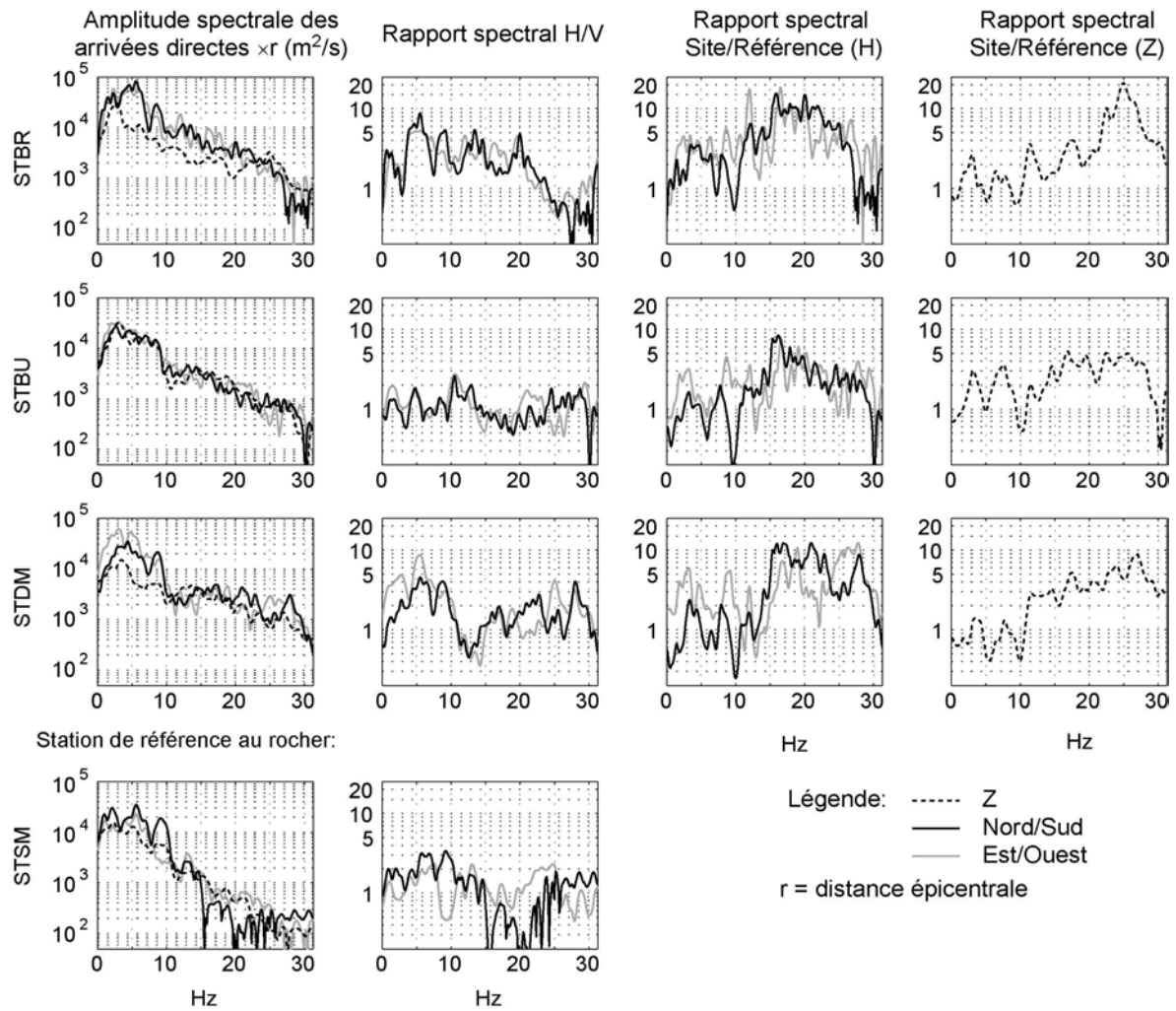


Figure IV-28 : Etude des effets de site à partir des arrivées directes des ondes S, rapports spectraux H/V et Site/Référence.

IV.11 Conclusions et perspectives.

Nous avons développé une méthode d'estimation de l'équivalent à phase minimale de la fonction source du mouvement sismique. Cette méthode, basée sur une déconvolution non-stationnaire à phase minimale du signal de coda, nous a permis de retrouver les principales caractéristiques de la fonction source du séisme de Rambervillers, telles que sa durée 0.5 ± 0.025 s ou son moment sismique 1.64×10^{16} N.m. De plus, outre le fait que cette méthode n'utilise qu'un seul enregistrement, elle présente l'avantage de ne nécessiter aucune connaissance a priori sur la structure ou l'atténuation du milieu traversé par les ondes. Cependant, une estimation du moment sismique ne pourra être obtenue qu'à partir de la connaissance du libre parcours moyen de transport du milieu. Inversement, Si le moment sismique est connu, cette méthode peut aussi être considérée comme un outil de mesure de $l^*(f)$. Néanmoins, la sensibilité du moment sismique au libre parcours moyen est limitée en

raison de sa dépendance à ce dernier : $l^{-1/2}$, modèle en simple scattering, ou $l^{*-3/4}$ pour le modèle diffusif.

D'autre part, nous avons observé que malgré l'invariance de l'énergie du champ d'ondes de coda, son contenu spectral présente des effets de directivité assez marqués, cohérents avec une propagation de la rupture du Nord vers le Sud.

Par ailleurs, comme nous le montre l'ondelette de la station SWS, l'ondelette source à phase minimale du signal de coda peut aussi comporter des effets de propagation ou des effets de site. C'est ce que nous avons étudié à partir des données accélérométriques du RAP, dont les stations sont localisées sur des sols de type sédimentaire. Nous avons ainsi calculé l'équivalent à phase minimale de la réponse de site par déconvolution des ondelettes de coda par l'ondelette de coda à la station de référence STSM. Bien, que nous n'ayons pas pu vérifier nos résultats à partir de la connaissance de la structure géologique de chaque site, les caractéristiques fréquentielles des réponses de site semblent cohérentes avec le comportement sous séisme d'une couche sédimentaire horizontale. Tout comme l'extraction de la fonction source, la déconvolution non-stationnaire à phase minimale du signal de coda nous a permis d'extraire les réponses de site à partir d'un seul séisme et avec une résolution fréquentielle nous permettant d'en calculer la réponse impulsionnelle.

L'utilisation de cette déconvolution à phase minimale du signal de coda dans un algorithme d'inversion généralisée, nous permettrait, d'une part, d'extraire directement l'effet de site associé à chaque station sans nécessairement disposer d'un site de référence au rocher, et d'autre part, d'en tester la stabilité ainsi que celle de la fonction source. De plus, contrairement à l'inversion généralisée sur les arrivées directes, il ne nous serait pas nécessaire d'imposer un modèle de source ou un modèle d'atténuation a priori, dont l'utilisation peut biaiser les résultats.

Enfin, d'une façon générale, la forme des ondelettes à phase minimale de coda, estimées sur les stations KIZ, ECH et MEZF, est assez dissymétrique. Même si l'ondelette source obtenue par fonction de Green empirique à la station ECH présente une dissymétrie similaire, rien ne nous prouve que cela soit toujours le cas, d'autant plus qu'en principe les modèles numériques de la cinématique de la rupture nous donnent plutôt des fonctions sources symétriques à 90° du plan de rupture. Si l'on veut pouvoir accéder à la vraie forme d'onde, il nous faudra donc estimer la vraie phase de l'ondelette source par déconvolution aveugle ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre V Déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur du séisme de Rambervillers

V.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, la déconvolution aveugle, est d'une part, un problème mal-posé parce qu'il s'agit d'une opération de déconvolution cherchant à retrouver une information qui peut très bien avoir été irrémédiablement perdue lors de l'opération de filtrage (problème direct). D'autre part, il est fortement sous déterminé car à partir d'un seul signal on veut en retrouver deux. Ainsi, à défaut d'avoir un modèle « physique » précis de l'un des deux signaux, la séparation va se baser sur des critères mathématiques plus ou moins associés à des propriétés physiques du système étudié.

Suivant les types de signaux utilisés, on distingue deux familles de méthodes de déconvolution aveugle : les méthodes mono-signal (SISO Single Input Single Output) et les méthodes multicanaux (MIMO Multiple Input Multiple Output). Ces dernières pouvant d'ailleurs être séparées en deux groupes (Tong et Perreau, 1998) : les méthodes statistiques et les méthodes déterministes (Figure V-1). Mais nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre suivant dont l'objet est justement l'application sismologique d'une sous classe de ces méthodes : les méthodes de type SIMO (Single Input Multi Output).

Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux méthodes de déconvolution aveugle mono-signal (SISO).

Comme nous l'ont montré les études sur le Kursk ou sur le séisme de Rambervillers, après avoir rétabli la stationnarité du signal de coda, nous avons pu en extraire par autocorrélation l'amplitude spectrale de la fonction source du mouvement sismique. Dans le cas d'une fonction source à phase minimale, nous avons vu que les relations de Bode-Bayard nous permettaient d'estimer la fonction source temporelle seulement à partir de son amplitude spectrale. Même si le caractère phase minimale d'une explosion sous-marine est dans une

certaine mesure plutôt bien justifié, il n'en est pas de même pour l'ondelette source d'un tremblement de terre. L'amplitude spectrale seule est alors insuffisante pour complètement définir l'ondelette temporelle.

Ainsi, si l'on désire estimer la vraie fonction source temporelle du mouvement sismique il nous faudra donc d'une part estimer son amplitude spectrale mais aussi sa phase. Depuis maintenant une vingtaine d'années, de nombreux auteurs ont montré que les statistiques d'ordre supérieur à 2 pouvaient, contrairement à la corrélation (propriétés statistiques d'ordre 2), nous permettre de retrouver la phase de l'ondelette génératrice d'un processus aléatoire seulement à partir d'une seule réalisation de ce processus aléatoire.

Depuis les travaux de (Lii et Rosenblatt, 1982) sur l'estimation de la phase de l'ondelette à partir du bispectre, un bestiaire très riche de méthodes de déconvolution aveugle a vu le jour dont on pourra trouver une revue dans les articles et ouvrages suivant (Nikias et Raghuveer, 1987; Mendel, 1991; Lacoume et al., 1997). Basées sur la théorie des cumulants et des spectres de cumulant développée dans les années soixante par (Brillinger, 1965; Brillinger et Rosenblatt, 1967a), ces méthodes utilisent aussi bien les propriétés statistiques d'ordre 3, c'est-à-dire la bicorrélation (en temps) ou le bispectre (en fréquence), que les propriétés statistiques d'ordre 4, c'est-à-dire la tricorrélation ou le trispectre. Elles peuvent être regroupées en deux classes : les méthodes non-paramétriques ou méthodes en fréquence et les méthodes paramétriques (Figure V-1).

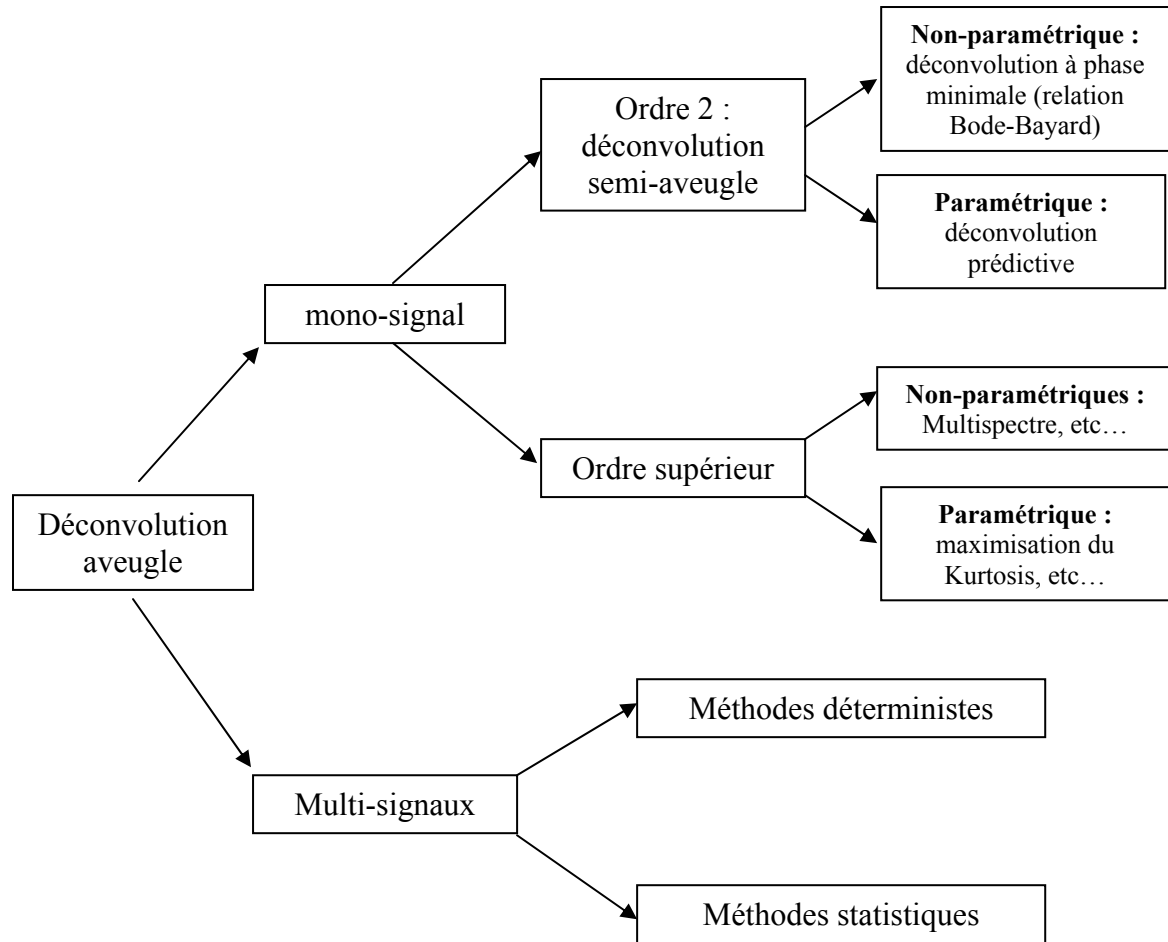


Figure V-1 : Organigramme des différentes méthodes de déconvolution aveugle.

Comme nous le montre l'article de synthèse de (Tugnait et al., 2000), l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur connaît un vif développement dans le domaine des télécommunications pour la déconvolution ou l'égalisation aveugle du canal de transmission. Cependant, l'application sismologique des statistiques d'ordre supérieur (Matsuoka et Ulrych, 1984; Lazear, 1993; Boumahdi, 1995; Boumahdi, 1996), même si elle a débuté très tôt avec des méthodes paramétriques telles que la déconvolution à minimum d'entropie (Wiggins, 1978), n'a pas connu le même succès. En effet, les signaux sismiques sont souvent trop courts et très souvent non-stationnaires. Or ces méthodes ont besoin de signaux stationnaires et longs de l'ordre de 5×10^4 échantillons (Mansar, 1997). Néanmoins, lors des études du Kursk et de la fonction source du séisme de Rambervillers, nous avons développé un algorithme de stationnarisation du signal sismique basé sur les différents modèles théoriques de la coda (Aki et Chouet, 1975). Ainsi, après stationnarisation, il constituera un signal favorable à l'application des méthodes de déconvolution aveugle mono-signal par statistiques d'ordre supérieur. Reste à savoir si les propriétés statistiques de la « réflectivité » du signal de coda

nous permettent de retrouver la phase de la fonction source du mouvement sismique. C'est ce que nous allons tester dans le chapitre qui va suivre, en utilisant soit une méthode paramétrique basée sur la maximisation du Kurtosis, soit des méthodes directes basées sur la tricorrélation.

V.2 Signal aléatoire et statistiques : quelques rappels

V.2.1 Processus aléatoire et ergodisme

Un **processus aléatoire** ou **signal aléatoire** est défini comme une application, qui, à chaque épreuve aléatoire Ω , fait correspondre une fonction du temps t . Ainsi un processus aléatoire $X(\Omega, t)$ peut être vu (Figure V-2) :

- Soit comme une fonction du temps, si on s'intéresse au résultat d'une épreuve Ω_0 donnée.
- Soit comme une variable aléatoire, si on s'intéresse à ce qui se passe pour un temps t_0 donné.

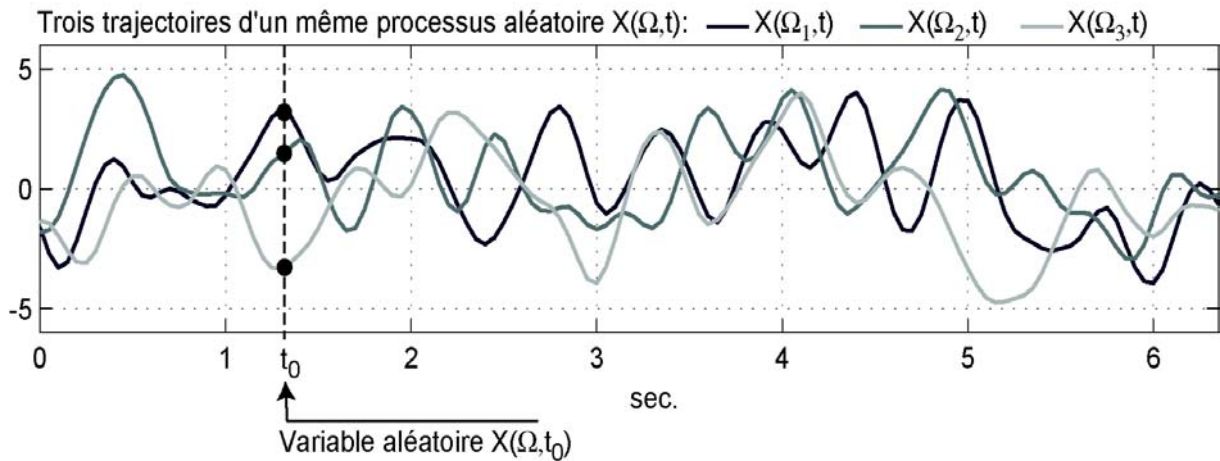


Figure V-2 : Les deux modèles associés à un processus aléatoire : une fonction du temporelle $X(\Omega_1, t)$, $X(\Omega_2, t)$ ou $X(\Omega_3, t)$, et à un instant t_0 , une variable aléatoire $X(\Omega, t_0)$.

On comprend bien qu'en raison du caractère aléatoire de ce type de signal, celui-ci n'est pas défini simplement par sa fonction temporelle mais plutôt par les densités de probabilité $p_x(u)$ des variables aléatoires $X(\Omega, t)$ associées aux différents instants t .

La **stationnarité** correspond donc à l'invariance au cours du temps des caractéristiques statistiques de ces différentes variables aléatoires :

$$p_x(u; t) = p_x(u; t + \tau) \quad \forall \tau \quad (\text{V-68})$$

Or comme la densité de probabilité n'est pas toujours accessible, on se limite souvent à l'ordre 2. Par exemple, un signal aléatoire sera dit stationnaire au second ordre au sens large (SSL), si sa moyenne M_X est indépendante du temps et si sa fonction d'autocovariance $E((X(t_1)-M_X)(X(t_2)-M_X))$ ne dépend que de $\tau=t_1-t_2$.

L'**ergodisme** est une propriété d'un processus aléatoire permettant de relier en quelque sorte les deux représentations, temporelle et aléatoire, de $X(\Omega, t)$. Ainsi, un processus stationnaire est dit ergodique si on peut définir ses caractéristiques statistiques en remplaçant les moyennes d'ensemble sur différentes réalisations par des moyennes temporelles réalisées sur une seule réalisation.

En pratique, même s'il est difficile de vérifier la propriété d'ergodisme, celle-ci est tout de même très souvent utilisée. En effet, il est souvent plus facile d'observer un signal aléatoire longtemps que d'en avoir des réalisations différentes. Ainsi, grâce à la propriété d'ergodisme nous pourrions tout de même calculer les propriétés statistiques d'un signal aléatoire, tels que ses moments ou ses cumulants, seulement à partir d'une seule de ses réalisations.

Du point de vue de l'application de la déconvolution aveugle par statistique d'ordre supérieur, le signal aléatoire que nous allons utiliser est le signal de coda stationnarisé. Au sens strict pour le sismologue, il ne s'agit pas d'un signal aléatoire. En effet, deux séismes ayant lieu sur la même faille, dans le même milieu hétérogène et présentant le même processus de rupture, produiront en un même point de la surface de la terre le même sismogramme. Il s'agit donc d'un signal déterministe. Néanmoins, considérons maintenant que les ondes, issues de ces deux événements identiques, se propagent dans deux milieux de structure crustale identique mais dont les hétérogénéités correspondent, par exemple, à deux réalisations distinctes de la loi de probabilité des fluctuations de vitesse à l'intérieur de la terre. On obtiendra deux séismes présentant des arrivées directes très similaires mais des signaux de coda complètement différents. Un sismogramme pourra donc être considéré comme un signal aléatoire dans la mesure où le milieu de propagation est un milieu hétérogène aléatoire. Ainsi, l'ergodisme nous permettra, à travers les propriétés statistiques « temporelles » du signal de coda, d'utiliser implicitement les propriétés statistiques « d'ensemble » des différentes réalisations possibles du milieu de propagation.

V.2.2 Moments et cumulants

Outre sa loi de probabilité $p_x(u)$, un signal aléatoire est aussi caractérisé par ses moments généralisés, correspondant à la projection de densité de probabilité $p_x(u)$ sur une application réelle $g(x)$. Les **moments généralisés** sont donc définis comme l'espérance de $g(x)$:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) p_x(u) du \quad (\text{V-69})$$

Classiquement, lorsque $g(x)$ est un polynôme de degré r : $g(x)=x^r$, on parle de **moment d'ordre r** , $M_{x(r)}$ correspondant à :

$$M_{x(r)} = E(x^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^r p_x(u) du \quad (\text{V-70})$$

La moyenne du processus aléatoire correspond donc, par exemple, à son moment d'ordre 1.

Enfin lorsque $g(x)=e^{iux}$, on définit deux fonctions $\Phi_x(v)$ et $\Psi_x(v)$, appelées respectivement **première** et **seconde fonction caractéristique** de $p_x(u)$ (tableau ci-dessous) permettant de décrire complètement la variable aléatoire $X(t)$.

Première fonction caractéristique ³¹	Seconde fonction caractéristique
$\Phi_x(v) = E(e^{iux})$	$\Psi_x(v) = \log(\Phi_x(v))$
Moments	Cumulants
$M_{x(r)} = E(x^r) = (-i)^r \left. \frac{d^r \Phi_x(v)}{dv^r} \right _{v=0}$	$C_{x(r)} = \text{Cum}[x, x, \dots, x] = (-i)^r \left. \frac{d^r \Psi_x(v)}{dv^r} \right _{v=0}$

Ces deux fonctions de v étant continues au voisinage de 0, elles sont développables en série de Taylor dont les coefficients correspondent respectivement au moments $M_{x(r)}$ et cumulants $C_{x(r)}$ (tableau ci-dessus).

Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, les cumulants seront pour nous un outil fondamental pour la déconvolution aveugle par statistique d'ordre supérieur. L'estimation des moments peut être effectuée par une étude statistique directement à partir d'un ensemble de réalisations en utilisant un estimateur de l'espérance mathématique : la moyenne, $M_{x(r)}=E(x^r)$. Cependant, l'estimation des cumulants semble plus compliquée

³¹ La première fonction caractéristique $\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuv} p_x(u) du$ correspond donc à la transformée de Fourier de $p_x(u)$.

puisque'elle nécessite de connaître $\Psi_x(\mathbf{v})$, ou $\Phi_x(\mathbf{v})$, et donc $p_x(\mathbf{u})$ qui est a priori inconnue. Néanmoins, comme on peut le trouver dans (Lacoume et al., 1997), les cumulants d'ordre r peuvent être calculés à partir des moments d'ordre inférieur ou égal à r :

$$\begin{aligned} C_{x(1)} &= M_{x(1)} \\ C_{x(2)} &= M_{x(2)} - M_{x(1)}^2 \\ C_{x(3)} &= M_{x(3)} - 3M_{x(1)}M_{x(2)} + 2M_{x(1)}^3 \\ C_{x(4)} &= M_{x(4)} - 4M_{x(3)}M_{x(1)} - 3M_{x(2)}^2 + 12M_{x(2)}M_{x(1)}^2 - 6M_{x(1)}^4 \end{aligned} \quad (\text{V-71})$$

V.2.3 Variables aléatoires multidimensionnelles

Comme nous l'avons vu, un processus aléatoire discret est composé d'une série temporelle de variable aléatoire $X(t)$. Il est souvent représenté par un vecteur :

$$X = [x(t_1) \quad x(t_2) \quad \cdots \quad x(t_N)]^T \quad (\text{V-72})$$

où N est le nombre d'échantillons du signal aléatoire. Un processus est donc considéré comme une variable aléatoire à plusieurs dimensions définie par une densité de probabilité conjointe $p_x(u_1, u_2, \dots, u_N)$. De la même façon que dans le cas d'une variable aléatoire à une dimension, on définit une **première** et **seconde fonction caractéristique conjointe** nous permettant de calculer les moments et les cumulants (tableau ci-dessous).

Première fonction caractéristique conjointe	Seconde fonction caractéristique conjointe
$\Phi_x(\mathbf{v}) = E[e^{i\mathbf{v}^T \mathbf{x}}] = \int_{R^N} e^{i\mathbf{v}^T \mathbf{u}} p_x(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ <p>où $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$</p>	$\Psi_x(\mathbf{v}) = \log(\Phi_x(\mathbf{v}))$
Moments	Cumulants
$M_{x[i_1, i_2, \dots, i_r]} = E[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]$ $= (-i)^r \frac{\partial^r \Phi_x(\mathbf{v})}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2} \cdots \partial v_{i_r}} \bigg _{\mathbf{v}=0}$	$C_{x[i_1, i_2, \dots, i_r]} = \text{Cum}[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]$ $= (-i)^r \frac{\partial^r \Psi_x(\mathbf{v})}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2} \cdots \partial v_{i_r}} \bigg _{\mathbf{v}=0}$

A titre d'exemple, on remarquera que les cumulants d'ordre 2, qui sont des variables à deux indices, peuvent être rangés dans une matrice correspondant à la matrice de covariance. La matrice de covariance $C_{X(2)}$ d'ordre r est de la forme :

$$\begin{aligned}
 C_{X(2)} &= [C_{x[i,j]}] \\
 &= \begin{bmatrix} \text{Cum}[x_1, x_1] & \text{Cum}[x_1, x_2] & \cdots & \text{Cum}[x_1, x_r] \\ \text{Cum}[x_2, x_1] & \text{Cum}[x_2, x_2] & \cdots & \text{Cum}[x_2, x_r] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cum}[x_r, x_1] & \text{Cum}[x_r, x_2] & \cdots & \text{Cum}[x_r, x_r] \end{bmatrix} \stackrel{\text{Variables aléatoires centrées}}{=} \begin{bmatrix} E[x_1 x_1] & E[x_1 x_2] & \cdots & E[x_1 x_r] \\ E[x_2 x_1] & E[x_2 x_2] & \cdots & E[x_2 x_r] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x_r x_1] & E[x_r x_2] & \cdots & E[x_r x_r] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

D'une façon similaire au cas de variables aléatoires scalaires, il existe pour les variables aléatoires multidimensionnelles des relations reliant les moments aux cumulants. Ainsi, les cumulants d'ordre 2, 3 et 4 d'un signal aléatoire centré, sont de la forme :

$$\begin{aligned}
 C_{X[i,j]} &= M_{X[i,j]} \\
 C_{X[i,j,k]} &= M_{X[i,j,k]} \\
 C_{X[i,j,k,l]} &= M_{X[i,j,k,l]} - M_{X[i,j]}M_{X[k,l]} - M_{X[i,k]}M_{X[j,l]} - M_{X[i,l]}M_{X[j,k]}
 \end{aligned} \tag{V-73}$$

Dans le cas d'un signal aléatoire non centré, on peut tout de même estimer ses cumulants en utilisant les relations précédentes mais seulement après avoir soustrait du signal sa valeur moyenne. En effet, si on considère deux signaux aléatoires de même distribution centrée $p_X(u)$ mais de valeurs moyennes différentes m_{X1} et m_{X2} respectivement : $p_{X1}(u+m_{X1})$ et $p_{X2}(u+m_{X2})$, on peut montrer que ces deux signaux ont des cumulants d'ordre supérieur à 2 identiques³². Ainsi l'opération qui consiste à centrer les signaux avant traitement, n'altérera pas les valeurs de leurs cumulants, au contraire, elle en simplifiera l'estimation à partir des moments. On pourra d'ailleurs consulter (Nikias et Petropulu, 1993; Lacoume et al., 1997) pour obtenir une expression des cumulants en fonction des moments dans le cas de signaux non centrés.

En pratique, nous calculerons d'ailleurs les cumulants d'un signal aléatoire en utilisant les relations (V-73) après avoir centré les signaux.

V.2.4 Variable aléatoire Gaussienne à N dimensions

Un signal aléatoire Gaussien à N échantillons peut donc être considéré comme une variable aléatoire à N dimensions de loi de probabilité conjointe :

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det \mathbf{C}_{X(2)}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{M}_{X(1)})^T \mathbf{C}_{X(2)}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{M}_{X(1)})\right) \tag{V-74}$$

³² Grâce à la propriété de décalage de la transformée de Fourier on peut montrer que les secondes fonctions caractéristiques de X_1 et X_2 ne diffèrent que d'un polynôme en ν d'ordre 1 et de coefficient M_{X1} et M_{X2} respectivement :

$$\Phi_{X1}(\nu) = e^{i2\pi\nu M_{X1}} \Phi_X(\nu) \Rightarrow \Psi_{X1}(\nu) = i2\pi\nu M_{X1} + \Psi_X(\nu)$$

Ainsi, puisque toute dérivation partielle d'un ordre supérieur à 2 annule la contribution des termes d'ordre 1 en ν , les cumulants d'ordre supérieur à 2 de X_1 et X_2 sont égaux.

où $\mathbf{M}_{X(1)}$ est la valeur moyenne vectorielle de \mathbf{X} : $\mathbf{M}_{X(1)} = E[\mathbf{X}]$ et \mathbf{C}_X est la matrice de covariance d'ordre N du processus aléatoire \mathbf{X} .

On peut alors montrer que la première et la seconde fonction caractéristique ont pour expression :

$$\begin{aligned}\Phi_X(\mathbf{v}) &= \exp\left(i\mathbf{v}^T \mathbf{m}_X - \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C}_X \mathbf{v}\right) \\ \Psi_X(\mathbf{v}) &= i\mathbf{v}^T \mathbf{m}_X - \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C}_X \mathbf{v}\end{aligned}\tag{V-75}$$

où $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$.

Le terme $J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}^T \mathbf{m}_X - 1/2 \mathbf{v}^T \mathbf{C}_X \mathbf{v}$ est une forme quadratique. Or comme elle ne comporte que des termes de degré 2 au maximum, toute dérivée partielle d'ordre 3 de $J(\mathbf{X})$ est donc nulle. Par conséquent, d'une part, les cumulants d'ordre supérieur à deux sont donc tous nuls, d'autre part, les moments $\mu_{X(i,j,k,\dots)}$ d'ordre supérieur à deux s'expriment uniquement à partir des moments d'ordre inférieur à deux. Ainsi, un signal aléatoire Gaussien est complètement déterminé par ses propriétés statistiques au second ordre.

Ce comportement caractéristique des signaux Gaussien est l'une des raisons pour laquelle jusqu'à très récemment les statistiques d'ordre supérieur ont très peu été utilisées. En effet, il était couramment admis qu'en raison du théorème de la limite centrale³³, la plupart des signaux qui nous entourent, sont a priori Gaussiens.

Après ces quelques rappels très rapides sur les outils de caractérisation d'une variable aléatoire dont on trouvera un exposé plus détaillé dans (Lacoume et al., 1997), nous allons voir maintenant comment les statistiques d'ordre supérieur nous permettent de retrouver la phase de l'ondelette source du mouvement sismique.

V.3 Multicorrélation, Multispectre et phase

V.3.1 Cas des signaux aléatoires

Soit $X = \{x(t_i)\}$ un signal aléatoire discret à valeurs réelles, on définit sa **multicorrélation d'ordre n** , aux instants t_0, t_1, \dots, t_{n-1} comme le cumulants croisés d'ordre n des variables aléatoires correspondant aux échantillons des instants t_1, t_2, \dots, t_n :

³³ Le théorème de la limite centrale dit que si on considère $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et identiquement distribuées, de moyenne M_X et de variance σ^2 et si on pose $S_N = (X_1 + X_2 + \dots + X_N)/N$, alors quand N tend vers l'infinie, on a :

$$\sqrt{N}(S_N - M_X) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ représente la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ .

$$C_{x(n)}(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = Cum[x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] \quad (V-76)$$

La multcorrélation d'ordre n mesure le degré de dépendance statistique conjoint, entre les valeurs prises par le signal aux instants t_1, t_2, \dots, t_n .

Par ailleurs, lorsque le signal aléatoire X est stationnaire au sens strict³⁴, toutes ses statistiques sont invariantes par changement d'origine du temps t . Par conséquent, si on prend comme temps origine $t=t_0$, la multcorrélation d'ordre n s'exprime directement en fonction des $n-1$ retards $\tau_i = t_{i+1} - t_1$:

$$C_{x(n)}(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = C_{x(n)}(0, t_1 - t_0, \dots, t_{n-1} - t_0) = C_{X(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (V-77)$$

Ainsi, la corrélation est donc bien une fonction à une variable du temps. La bicorrélation et la tricorrélation, quant à elles, sont respectivement des fonctions de deux et trois variables du temps.

Le **multispectre d'ordre n** d'un signal aléatoire réel $X=\{x(t)\}$ est défini comme la transformée de Fourier Discrète de sa multcorrélation d'ordre n :

$$\begin{aligned} S_{X(n)}(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}) &= TFD[C_{X(n)}(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})] \\ &= \sum_{t_0} \dots \sum_{t_{n-1}} C_{X(n)}(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) e^{-2\pi i(t_0\nu_0 + \dots + t_{n-1}\nu_{n-1})} \end{aligned} \quad (V-78)$$

Pour un signal stationnaire, l'indépendance vis-à-vis de t de sa multcorrélation impose la condition suivante sur les fréquences du multispectre :

$$\nu_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i = 0 \quad (V-79)$$

Cette relation définit un hyperplan dans l'espace des fréquences à n dimensions sur lequel le multispectre $S_{X(n)}(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ est non nul. Cet hyperplan est appelé multiplicité stationnaire (Picinbono, 1991). On peut d'ailleurs montrer que les représentations spectrales à n ou $n-1$ dimensions sont reliées par la relation suivante :

$$S_{X(n)}(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}) = S_{X(n)}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} \nu_i\right) \quad (V-80)$$

où $S_{X(n)}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ est la transformée de Fourier discrète de la multcorrélation d'ordre n exprimée en fonction de ses $n-1$ retards τ_i : $C_{X(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$.

³⁴ En toute rigueur, on peut définir une stationnarité à l'ordre n uniquement, impliquant que toutes les statistiques jusqu'à l'ordre n sont invariantes par translation dans le temps.

V.3.2 Cas des signaux transitoires

Les multicorrélations et les multispectres des signaux transitoires sont définis à partir de leurs moments contrairement aux multicorrélations et multispectres des signaux aléatoires qui sont basés sur leurs cumulants (Nikias et Petropulu, 1993).

Ainsi, la multicorrélation d'ordre n d'un signal transitoire $a(t)$ à valeurs réelles est définie de la façon suivante :

$$C_{a(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \sum_t a(t)a(t + \tau_1) \cdots a(t + \tau_{n-1}) \quad (\text{V-81})$$

De même, le multispectre d'ordre n d'un signal transitoire $a(t)$ est défini comme la transformée de Fourier de sa multicorrélation d'ordre n . Soit $A(\nu)$ la transformée de Fourier discrète de $a(t)$, le multispectre d'ordre n de $a(t)$ est de la forme :

$$S_{a(n)}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) = TFD[C_{a(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})] = A\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i\right) \prod_{i=1}^{n-1} A(\nu_i) \quad (\text{V-82})$$

Le multispectre d'ordre n d'un signal transitoire $a(t)$ correspond donc à un produit de n fois son spectre $A(\nu)$. Nous allons voir dans quelle mesure ce multispectre peut nous apporter l'information sur la phase de $A(\nu)$.

V.3.3 Relation phase/multispectre (signal transitoire)

Soit $a(t)$ un signal transitoire réel, son spectre $A(\nu)$ peut se mettre sous la forme :

$$A(\nu) = |A(\nu)| e^{i\Phi(\nu)} \quad (\text{V-83})$$

où $|A(\nu)|$ et $\Phi(\nu)$ sont respectivement l'amplitude spectrale et la phase du spectre de $a(t)$.

Intéressons nous tout d'abord à l'ordre 2, c'est-à-dire à l'autocorrélation $C_{a(2)}(\tau)$ et au spectre de puissance $S_{a(2)}(\nu)$ de $a(t)$. D'après (V-82), le spectre de puissance de $a(t)$ est donc de la forme :

$$S_{a(2)}(\tau) = A(\nu)A(-\nu) \quad (\text{V-84})$$

or pour des signaux réels $A(-\nu) = A^*(\nu)$, cette relation devient :

$$S_{a(2)}(\tau) = A(\nu)A^*(-\nu) = |A(\nu)|^2 \quad (\text{V-85})$$

On retrouve donc la forme classique de l'autocorrélation, et par conséquent, le fait qu'elle ne nous apporte aucune information sur la phase de $A(\nu)$.

Si on s'intéresse maintenant à la bicorrélation et notamment au bispectre, ce dernier est de la forme :

$$S_{a(3)}(\nu_1, \nu_2) = A(-\nu_1 - \nu_2)A(\nu_1)A(\nu_2) = A^*(\nu_1 + \nu_2)A(\nu_1)A(\nu_2) \quad (\text{V-86})$$

Ainsi en remplaçant $A(\nu)$ par son expression (V-83), on obtient directement les expressions suivantes du module et de la phase $\Psi_{a(3)}$ du bispectre de $a(t)$:

$$\begin{aligned} |S_{a(3)}(\nu_1, \nu_2)| &= |A^*(\nu_1 + \nu_2)A(\nu_1)A(\nu_2)| \\ \Psi_{a(3)}(\nu_1, \nu_2) &= \Phi(\nu_1) + \Phi(\nu_2) - \Phi(\nu_1 + \nu_2) \end{aligned} \quad (\text{V-87})$$

Ainsi, on constate donc que, contrairement à la corrélation, le bispectre contient l'information sur la phase $\Phi(\nu)$ de $A(\nu)$.

De même, on montre de façon similaire que le module du trispectre et sa phase sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} |S_{a(3)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)| &= |A^*(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)A(\nu_1)A(\nu_2)A(\nu_3)| \\ \Psi_{a(3)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= \Phi(\nu_1) + \Phi(\nu_2) + \Phi(\nu_3) - \Phi(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \end{aligned} \quad (\text{V-88})$$

D'une façon similaire au bispectre, le trispectre comporte aussi l'information sur la phase $\Phi(\nu)$ de $A(\nu)$. Comme nous allons le voir maintenant, c'est cette propriété qui va nous permettre d'identifier la phase de l'ondelette.

V.3.4 Propriétés de symétrie des multicorrélations et des multispectres

D'un point de vue pratique, le calcul des multicorrélations et des multispectres peut être largement simplifié par utilisation de leurs propriétés de symétrie. Par exemple à l'ordre 2, la corrélation et la densité spectrale de puissance étant toutes deux des fonctions paires, il suffira de calculer leur valeur sur seulement la moitié de l'axe des fréquences. Le temps nécessaire à leur calcul est par conséquent divisé par deux. D'une façon générale on peut montrer qu'une multicorrélation ou un multispectre d'ordre p , auront $p!$ valeurs égales dans l'espace des retards ou l'espace des fréquences, respectivement. Ainsi, la tricorrélation comportera donc $4! = 24$ valeurs identiques dans l'espace des retards permettant ainsi de diviser d'autant son temps de calcul. Nous n'allons pas présenter toutes les relations de symétries ; le lecteur intéressé pourra consulter (Pflug et al., 1992; Nikias et Petropulu, 1993; Lacoume et al., 1997) par exemple pour en avoir un exposé détaillé.

V.4 Estimation de la phase de l'ondelette source par statistique d'ordre supérieur

V.4.1 Filtrage et statistique d'ordre supérieur

Après stationnarisation le signal de coda $u(t)$ est donc la convolution d'une ondelette source $s(t)$ avec une fonction de Green $g(t)$ assimilable à un signal aléatoire stationnaire, que nous avons appelée **réflectivité de coda** :

$$u(t) = g(t) * s(t) \quad (\text{V-89})$$

L'ondelette source joue donc en quelque sorte le rôle de filtre pour la réflectivité de coda. L'utilisation des statistiques d'ordre supérieur de $u(t)$ afin d'extraire la fonction source $s(t)$, nécessite par conséquent de déterminer les transformations subies par les multicorrélations et multispectres lors d'une opération de filtrage linéaire. A ce propos, nous présentons dans le tableau suivant un résumé des relations en filtrage et statistiques d'ordre 2, 3 et 4.

Ordre 2	Corrélation : $C_{u(2)}(\tau) = \sum_{t_0} \sum_{t_1} s(t_0) s(t_1) C_{g(2)}(\tau + t_0 - t_1) = C_{s(2)}(\tau) * C_{g(2)}(\tau) \quad (\text{V-90})$
	Densité spectrale de puissance : $S_{u(2)}(\nu) = S(\nu) ^2 S_{g(2)}(\nu) \quad (\text{V-91})$
Ordre 3	Bicorrélation : $C_{u(3)}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{t_0} \sum_{t_1} \sum_{t_2} s(t_0) s(t_1) s(t_2) C_{g(3)}(\tau_1 + t_0 - t_1, \tau_2 + t_0 - t_2) \quad (\text{V-92})$ $= C_{s(3)}(\tau_1, \tau_2) * C_{g(3)}(\tau_1, \tau_2)$
	Bispectre : $S_{u(3)}(\nu_1, \nu_2) = S(\nu_1) S(\nu_2) S^*(\nu_1 + \nu_2) S_{g(3)}(\nu_1, \nu_2) \quad (\text{V-93})$
Ordre 4	Tricorrélation : $C_{u(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sum_{t_0} \sum_{t_1} \sum_{t_2} \sum_{t_3} s(t_0) s(t_1) s(t_2) s(t_3) C_{g(4)}(\tau_1 + t_0 - t_1, \tau_2 + t_0 - t_2, \tau_3 + t_0 - t_3) \quad (\text{V-94})$ $= C_{s(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) * C_{g(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$
	Trispectre : $S_{u(4)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = S(\nu_1) S(\nu_2) S(\nu_3) S^*(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) S_{g(4)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \quad (\text{V-95})$

On constate donc que, quelque soit l'ordre (2, 3, 4) auquel on s'intéresse, la multicorrélation du signal de coda est la convolution de la multicorrélation de l'ondelette source $s(t)$ avec celle de la fonction de Green de coda $g(t)$. Ainsi, lorsque l'on peut assimiler la multicorrélation de $g(t)$ à un Dirac, la multicorrélation ou le multispectre de $u(t)$ correspondent donc à la multicorrélation ou au multispectre de l'ondelette source respectivement. Or puisque les statistiques d'ordre supérieur à deux telles que le bispectre ou le trispectre comportent l'information de phase (paragraphe V.3.3), il nous permettront d'évaluer complètement et de manière aveugle l'ondelette source du mouvement sismique $s(t)$.

Ainsi, le pouvoir de résolution de la déconvolution aveugle de $s(t)$ par statistique d'ordre supérieur est donc conditionné par :

- L'existence des statistiques d'ordre supérieur dépendant de la loi de probabilité de $g(t)$, c'est-à-dire que $C_{g(3)} \neq 0$ ou $C_{g(4)} \neq 0$ par exemple. La réflectivité $g(t)$ ne pourra donc pas suivre une loi Gaussienne qui, comme nous l'avons vu au paragraphe V.2.4, a tous ses cumulants d'ordre supérieur à 2 nuls.
- Le caractère « impulsif » (dirac) des multicorrélations d'ordre supérieur $C_{g(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \approx \delta(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ associé à la notion de blancheur du signal $g(t)$.

V.4.2 Condition d'identification de $s(t)$ et blancheur de la réflectivité de coda $g(t)$

Classiquement la propriété de blancheur d'un signal aléatoire est définie à l'ordre 2.

Définition :

On appelle bruit blanc un processus stationnaire au sens large, $X(t)$, dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences :

$$\begin{aligned} C_{X(2)}(t) &= \gamma_{X(2)} \delta(t) \\ S_{X(2)}(\nu) &= \gamma_{X(2)} \end{aligned} \quad (V-96)$$

où $\gamma_{X(2)}$ est la variance, c'est-à-dire la puissance du signal aléatoire X .

Cependant, mis à part le cas d'un signal Gaussien, lorsque l'on travaille avec des statistiques d'ordre supérieur, la blancheur à l'ordre deux ne nous permet malheureusement pas de pouvoir définir le comportement de la bicorrélation ou de la tricorrélation par exemple. On est donc amené à définir la notion de « blancheur d'ordre supérieur ».

Définition :

Un signal aléatoire réel stationnaire $X=\{x(t)\}$ est dit blanc d'ordre n , si et seulement si tous ses multispectres jusqu'à l'ordre n inclus, sont constants (Bondon et Picinbono, 1990) :

$$\left. \begin{aligned} C_{X(k)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) &= \gamma_{X(k)} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \dots \delta(\tau_{k-1}) \\ S_{X(k)}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{k-1}) &= \gamma_{X(k)} \end{aligned} \right| \quad \forall k \in [1, \dots, n] \text{ et } S_{X(n)} \neq 0 \quad (\text{V-97})$$

où $\gamma_{X(k)}$ est une constante qui à l'ordre 3 et 4 après normalisation par la variance $\gamma_{X(2)}$ correspond respectivement à l'asymétrie $K_2^3\{x(t)\}$ et à l'aplatissement $K_2^4\{x(t)\}$ de la loi de probabilité de X :

$$\begin{aligned} K_2^3\{x(t)\} &= \frac{\gamma_{X(3)}}{[\gamma_{X(2)}]^{\frac{3}{2}}} \\ K_2^4\{x(t)\} &= \frac{\gamma_{X(4)}}{[\gamma_{X(2)}]^2} \end{aligned} \quad (\text{V-98})$$

Ainsi, un signal est dit bruit blanc parfait s'il est blanc à tous les ordres jusqu'à l'infini. Un tel bruit blanc parfait est alors constitué d'échantillons statistiquement indépendants³⁵. Ainsi, même si un signal aléatoire est blanc à l'ordre 2, c'est-à-dire décorrélé³⁶, il peut très bien avoir des cumulants croisés d'ordre supérieur à deux non nuls. Néanmoins dans le cas d'un processus Gaussien, où la décorrélation entraîne l'indépendance, la blancheur à l'ordre 2 entraîne la blancheur parfaite.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'une condition nécessaire à l'identification de la phase de l'ondelette, est la non nullité de ses cumulants d'ordre supérieur. Ainsi, si on considère que d'un point de vue statistique le signal aléatoire $g(t)$ comporte « autant » de valeurs négatives que positives, la loi de probabilité associée à la réflectivité de coda (Paragraphe V.2.1) n'a pas de raison a priori d'être asymétrique. Par conséquent, son cumulant d'ordre 3 sera nul. La bicorrélation est alors inutilisable, on est donc contraint d'utiliser les statistiques d'ordre 4, c'est-à-dire la tricorrélation.

De plus, toujours d'après le paragraphe précédent V.4.1 , en plus de la condition de non nullité du kurtosis de $u(t)$ ($\gamma_{(4)u} \neq 0$), la séparation de la tricorrélation de $g(t)$ de celle de l'ondelette $S(t)$ ne pourra se faire que si la tricorrélation de $g(t)$ est un Dirac :

$$C_{g(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \gamma_{G(4)} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) \quad (\text{V-99})$$

³⁵ Un vecteur aléatoire X est indépendant si et seulement si $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \dots p_X(x_n)$

³⁶ On dit qu'un vecteur aléatoire X de longueur n est non corrélé si et seulement si sa matrice de covariance est diagonale : X non corrélé $\Leftrightarrow C_{X(2)} = [C_{x[i,j]}] = \text{diag}(\text{Cum}[x_i, x_i])$

c'est-à-dire que si $g(t)$ est un bruit blanc stationnaire d'ordre 4. En effet, d'après (V-94), la tricorrélation du signal de coda stationnarisé $u(t)$ est de la forme :

$$C_{u(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = C_{S(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) * \underbrace{\gamma_{g(4)} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3)}_{C_{g(4)}} = C_{S(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (\text{V-100})$$

Elle est donc égale à celle de l'ondelette source $S(t)$ du mouvement sismique à un facteur multiplicatif près égal $\gamma_{g(4)}$. En l'absence d'information sur le kurtosis de $g(t)$, il nous est donc impossible de retrouver la vraie amplitude de l'ondelette. On retrouve ainsi l'indétermination classique des méthodes de déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur.

En résumé, Afin de pouvoir extraire des statistiques d'ordre supérieur l'information sur la phase de l'ondelette, la fonction de Green $g(t)$ du signal de coda doit donc être assimilable à un **bruit blanc stationnaire d'ordre 4**. Néanmoins, nous vérifierons dans un premier temps, lors de l'application aux données réelles, la nullité de la bicorrélation.

V.4.3 Pourquoi utiliser les cumulants plutôt que les moments ?

La corrélation, la bicorrélation et la tricorrélation sont définies à partir des cumulants plutôt qu'à partir des moments essentiellement pour trois raisons. La première est due au fait que les cumulants d'ordre supérieur à 2 sont nuls pour un signal Gaussien. On garde ainsi de façon directement « apparente » la propriété selon laquelle les signaux Gaussiens ne peuvent pas nous apporter d'information sur la phase. La seconde est que les cumulants possèdent la propriété d'additivité pour des processus indépendants, alors que cela n'est pas toujours le cas pour les moments (Nikias et Petropulu, 1993). Enfin, les cumulants, contrairement aux moments, possèdent la propriété de s'annuler au-delà d'un certain retard pour les signaux à mémoire limitée (processus aléatoire filtré par un système MA) (Lacoume et al., 1997). Cette propriété permet d'étendre la technique du corrélogramme à la bicorrélation et tricorrélation.

V.5 Application aux données réelles

Avant de pouvoir prétendre extraire l'ondelette source du mouvement sismique du signal de coda stationnarisé par statistiques d'ordre supérieur, il faut vérifier que celles-ci soient non nulles. C'est ce que nous allons faire dans un premier temps.

V.5.1 Les propriétés statistiques du champ d'ondes de coda : $u(t)$ est-il Gaussien ?

V.5.1.1 Le modèle

Le champ d'onde $u(t)$ créé, à un instant t , en un point x , est engendré par la superposition des ondelettes diffractées sur des hétérogénéités du milieu appartenant à une couronne elliptique de foyer S (Source) et R (récepteur) (Figure V-3).

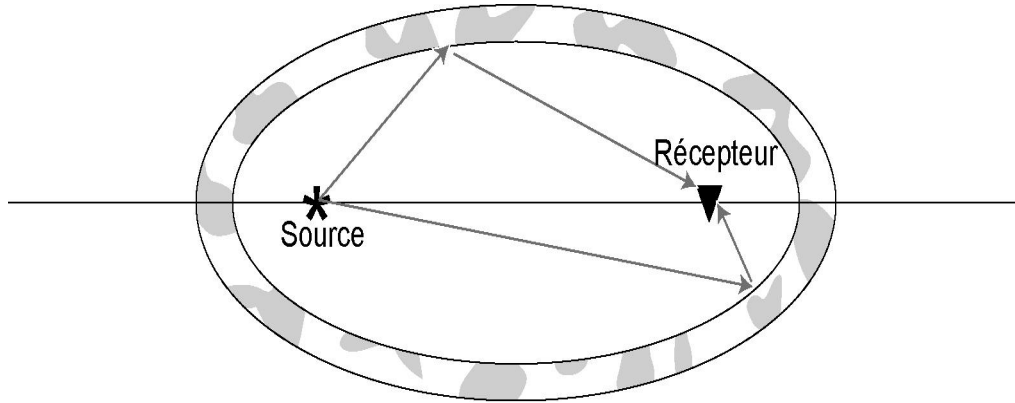


Figure V-3 : Modèle du champ d'ondes de coda : couronne de diffraction

En se plaçant dans une hypothèse de simple scattering et en appelant $g_r(t, \Omega)$ la réflectivité dans une direction Ω , le mouvement du sol en un point x prend la forme intégrale suivante :

$$u(t) = \int g_r(t, \Omega) * s(t, \Omega) d\Omega \quad (V-101)$$

où $s(t, \Omega)$ est la source apparente rayonnée dans la direction Ω . Dans le cas où l'on considère un milieu de vitesse moyenne V_s , on peut considérer en première approximation que l'intégration s'effectue sur tous les angles solides le long d'une coquille elliptique dont sont issues les ondes ayant parcouru une distance source-récepteur égale à $r = t * V_s$. Ainsi, en première approximation, en négligeant la dépendance azimutale de $s(t, \Omega)$, on peut sortir le terme de source de sous l'intégrale (V-101). On retrouve l'expression (V-89) du mouvement $u(t)$ où la réflectivité de coda est donc en quelque sorte, une somme de variables aléatoires $g_r(t, \Omega)$:

$$g(t) \approx \int g_r(t, \Omega) d\Omega \quad (V-102)$$

Par conséquent, d'après le théorème de la limite centrale (paragraphe V.2.4), quelle que soit la loi de probabilité associée à $g_r(t, \Omega)$, la loi de probabilité du mouvement $g(t)$ doit être très proche d'une loi Gaussienne. Dans ce cas, ses cumulants d'ordre supérieur à deux, et donc ceux de $u(t)$, sont tous nuls. Ces derniers ne nous apportent donc plus aucune information sur la phase de l'ondelette source.

Néanmoins, le champ en onde S rayonné par une dislocation est plutôt directif (Chapitre 4), ce qui a pour conséquence de limiter la « Gaussianisation » de $u(t)$ due à l'effet de moyennage lors de l'intégration. On peut donc s'attendre à ce que $u(t)$ ne soit pas complètement Gaussien et qu'il comporte encore des caractéristiques spécifiques aux propriétés statistiques des processus aléatoires $g_r(t, \Omega)$.

V.5.1.2 Propriétés statistiques de la « réflectivité » associée à la coda

La notion de réflectivité $g_r(t, \Omega)$ que nous avons introduite précédemment est à rapprocher de la notion de réflectivité dans le domaine de la prospection pétrolière où elle est aussi désignée sous le nom de « coefficient de réflexion première ». Elle concerne des ondes avec une propagation verticale. Et, comme nous le montre (Silvia et Robinson, 1979) dans le cas d'un modèle 1D stratifié, elle correspond à la série des coefficients de réflexion des différentes couches rencontrées par l'onde. En sismique pétrolière, une estimation de la réflectivité du milieu est obtenue à partir des mesures des propriétés mécaniques des roches par diagrapie le long d'un forage. L'étude des propriétés statistiques des données en forage montre d'une façon générale que la réflectivité a une densité de probabilité non-Gaussienne proche d'une distribution « Gaussienne généralisée » $G(r; \alpha, \beta)$:

$$G(r; \alpha, \beta) = \{\alpha / [2\beta\Gamma(1/\alpha)]\} e^{-\left(\frac{|r|}{\beta}\right)^\alpha} \quad (V-103)$$

où α et β sont deux paramètres positifs permettant de changer la forme de la loi de probabilité G . (Walden, 1985) montra qu'en pratique les données réelles ont un coefficient α compris entre 0.6 et 1.5, ce qui correspond à des kurtosis supérieurs à zéro pouvant atteindre des valeurs de 12. D'une façon générale, le caractère non Gaussien de la réflectivité « verticale » de la croûte terrestre est très déjà utilisé en sismique pétrolière lors de l'application de méthode de déconvolution aveugle telle que la déconvolution par minimisation de l'entropie (Wiggins, 1978). Mais nous y reviendrons plus tard, lors de l'étude des méthodes paramétriques.

D'une façon générale, les études de coda s'intéressent essentiellement au moment d'ordre 2 de $g_r(t, \Omega)$ (Shiomi et al., 1997). D'ailleurs, lors de simulations de champs d'ondes de coda, il est souvent considéré que la distribution des fluctuations des vitesses à l'intérieur de la terre par rapport à la vitesse moyenne V_s , suivent une loi Gaussienne (Frankel et Clayton, 1986) bien que, comme on peut le voir dans l'article (Wu et al., 1994), cela ne soit pas le cas de la distribution des vitesses le long de forages en Allemagne (Figure V-4).

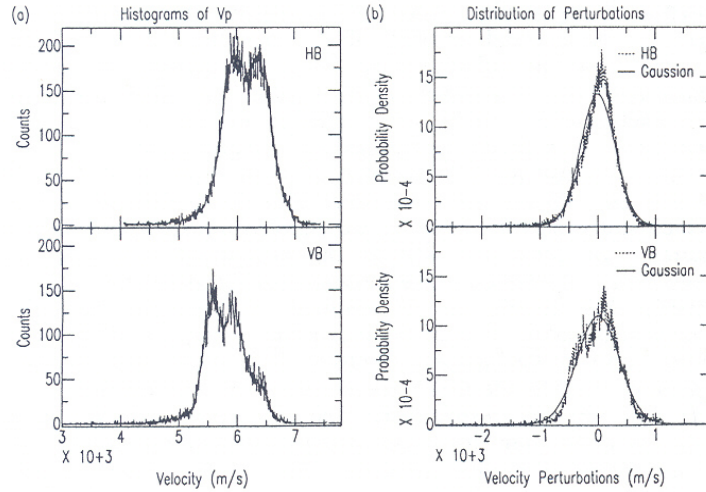


Figure V-4 : a) Distribution des vitesses pour deux forages HB et VB en Allemagne, b) Distribution des vitesses pour deux forages HB et VB en Allemagne après avoir retirée deux anomalies majeures associées à deux structures géologiques distinctes (Wu et al., 1994).

Ainsi contrairement aux hypothèses classiques faites sur la coda en sismologie, nous allons considérer que celle-ci n'est pas complètement un signal Gaussien comme on peut le voir sur la Figure V-4. Même si il peut être très faible, c'est cet écart à la Gaussianité que nous allons tenter d'utiliser.

Ainsi, si le caractère non Gaussien de $g_r(t, \Omega)$ n'est pas trop altéré par l'effet de moyennage, notamment en raison de la directivité de la source, $g(t)$ et donc $u(t)$ sont aussi, par conséquent, des signaux aléatoires non Gaussien. D'un point de vue statistique, $u(t)$ et $g(t)$ pourront être modélisés comme la somme d'un signal aléatoire Gaussien $u_G(t)$, respectivement $g_G(t)$, avec un signal aléatoire non-Gaussien $u_N(t)$, respectivement $g_N(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_G(t) + u_N(t) \\ g(t) &= g_G(t) + g_N(t) \end{aligned} \quad (V-104)$$

En faisant l'hypothèse que ces deux signaux sont indépendants, on peut donc invoquer la propriété d'additivité des cumulants (Nikias et Petropulu, 1993). Ainsi, les cumulants d'ordre r de $u(t)$ sont la somme des cumulants d'ordre r de $u_G(t)$ et $u_N(t)$:

$$C_{(r)u} = C_{(r)u_G} + C_{(r)u_N} \quad (V-105)$$

Or comme les cumulants d'ordre supérieur à 2 d'un signal Gaussien sont nuls, la bicorrélation et la tricorrélation de $u(t)$ sont égales à la bicorrélation et la tricorrélation du processus non-Gaussien $u_N(t)$:

$$\begin{aligned} C_{(3)u}(\tau_1, \tau_2) &= C_{(3)u_N}(\tau_1, \tau_2) = C_{(3)u_G}(\tau_1, \tau_2) * C_{(3)u_N}(\tau_1, \tau_2) \\ C_{(4)u}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= C_{(4)u_N}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = C_{(4)u_G}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) * C_{(4)u_N}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \end{aligned} \quad (V-106)$$

Cependant, même si d'un point de vue purement théorique, la présence d'un signal « parasite » Gaussien est invisible pour les cumulants d'ordre supérieur à deux, en pratique comme nous allons le voir, ils augmenteront la variance des estimations des cumulants.

V.5.2 Estimation des statistiques d'ordre supérieur

Ainsi, dans un premier temps, afin de tester le caractère non Gaussien du signal de coda stationnarisé, nous avons estimé sa bicorrélation et sa tricorrélation.

Grâce aux relations (V-73) et à l'hypothèse d'ergodicité, leur estimation est basée sur l'estimation des moments d'ordre 3 et d'ordre 4 des signaux centrés :

$$\begin{aligned}\hat{C}_{u(3)}(k_1, k_2) &= \frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_1)u(n+k_2) \\ \hat{C}_{u(4)}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_1)u(n+k_2)u(n+k_3) \\ &\quad - \left[\frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_1) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_2-k_3) \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_2) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_3-k_1) \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_3) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_n u(n)u(n+k_1-k_2) \right]\end{aligned}\quad (V-107)$$

où N est le nombre d'échantillons de u(n).

L'estimateur $\hat{C}_{u(3)}(k_1, k_2)$ de la bicorrélation s'exprime donc directement à partir du moment d'ordre 3 du signal de coda u(t) centré. Il s'agit d'un estimateur biaisé mais consistant³⁷ de la bicorrélation. On peut obtenir un estimateur non biaisé en remplaçant le terme 1/N par 1/(N-Max(k₁,k₂)). Du point de vue variance de l'estimation, on peut montrer (Lacoume et al., 1997) que la variance de l'estimateur de la bicorrélation à temps discret peut se mettre sous la forme :

$$Var[\hat{C}_{u(3)}(k_1, k_2)] = \frac{1}{N} \sum_k [C_{u(2)}(k)]^3 + \frac{1}{N} \sum_k C_{u(6)}(k+k_1, k+k_2, k, k_1, k_2) \quad (V-108)$$

où C_{x(2)}(k) est la corrélation et C_{x(6)}(k₁, k₂, k₃, k₄, k₅) est la multicorrélation d'ordre 6. On remarque que cet estimateur de la bicorrélation est efficace puisque lorsque N tend vers l'infini sa variance tend vers zéro.

³⁷ Un estimateur consistant est un estimateur qui converge vers la vraie valeur du paramètre estimé lorsque le nombre N de points utilisés pour l'estimation tend vers l'infini.

D'autre part, on remarque que la variance de l'estimation de la bicorrélation est au moins de l'ordre de grandeur de la corrélation des signaux mis en jeux : $u_G(t)$ et $u_N(t)$. D'ailleurs, dans le cas d'un signal Gaussien standardisé de N échantillons, on peut montrer que la variance de la bicorrélation pour $k_1=0$ et $k_2=0$ est de l'ordre de $6/N$.

En ce qui concerne la tricorrélation, son calcul nécessite donc l'estimation des moments d'ordre 4 et d'ordre 2 de $u(t)$. Il s'agit, aussi d'un estimateur biaisé mais consistant. L'expression de sa variance est beaucoup plus complexe, nous en donnerons une expression pour un décalage nul, $k_1=k_2=k_3=0$ correspondant au Kurtosis $\gamma_{u(4)}$:

$$Var[\gamma_{u(4)}] = \frac{1}{N} (\gamma_{u(8)} + 16\gamma_{u(6)}\gamma_{u(2)} + 48\gamma_{u(5)}\gamma_{u(3)} + 34\gamma_{u(4)}^2 + 72\gamma_{u(4)}\gamma_{u(2)}^2 + 144\gamma_{u(3)}^2\gamma_{u(2)} + 24\gamma_{u(2)}^4) \quad (V-109)$$

Ainsi, comme un signal Gaussien $u(n)$ a tous ses cumulants d'ordre supérieur à 2 nuls, la variance de son kurtosis (pour un signal standardisé) sera de l'ordre de $24/N$, N étant le nombre d'échantillons de $u(n)$.

V.5.3 Calcul de la bicorrélation

Même si il est couramment admis en sismique pétrolière que les cumulants d'ordre 3 de la réflectivité du sous-sol sont nuls, en raison de la symétrie de sa loi de probabilité, on a tout de même testé le comportement de la bicorrélation du signal de coda stationnarisé du séisme de Rambervillers.

Nous avons donc calculé la bicorrélation des signaux des stations ECH, KIZ, HAU, HINF et MEZF d'une longueur de 85s, soit 1700 échantillons pour un fréquence d'échantillonnage de 20Hz. Comme on peut le voir sur la Figure V-5, la bicorrélation des signaux réels présente des valeurs plutôt faibles avec une forte variance. La bicorrélation ne semble donc pas nous fournir d'information sur la source sismique. Un tel comportement peut avoir deux origines. La première est associée à une longueur insuffisante des signaux utilisés, ne permettant pas de réduire suffisamment la variance de l'estimation de la bicorrélation de façon à ce que l'informations sur la source ressorte du bruit d'estimation.

La seconde est associée au fait que la bicorrélation puisse être nulle en raison de la symétrie de la loi de probabilité associée aux signaux de coda.

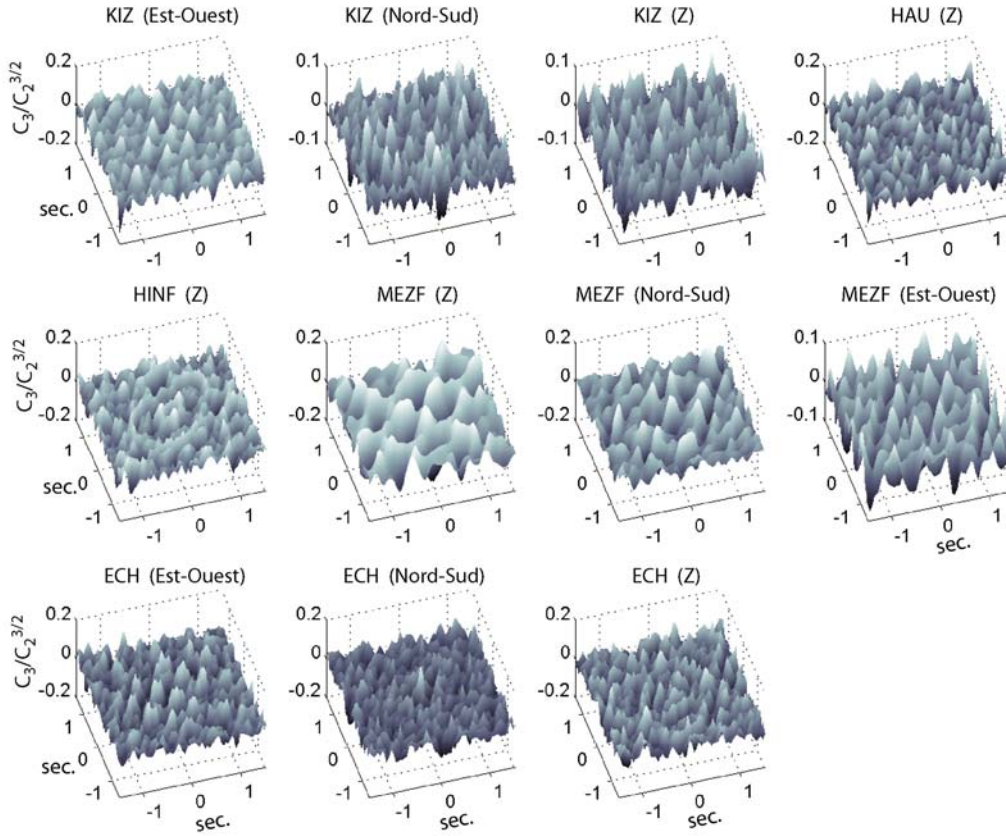


Figure V-5 : Bicorrélation du signal de coda stationnarisé des stations KIZ, HINF,HAU, MEZF et ECH.

Ainsi, en considérant qu'en première approximation l'ondelette source de mouvement sismique estimée sur l'ensemble des stations est identique, on peut réduire la variance de l'estimation de la bicorrélation en moyennant toutes les bicorrélations obtenues sur chacune des composantes de l'ensemble des stations du réseau :

$$Var\left[\sum_{i=1}^N C_{u_i(3)}(\tau_1, \tau_2)\right] = \frac{1}{N} Var[C_{u(3)}(\tau_1, \tau_2)] \quad (V-110)$$

où N est le nombre des signaux à notre disposition, dans notre cas 11.

La Figure V-6 présente la bicorrélation des signaux de coda après un moyennage sur 6 ou 11 bicorrélations des différentes stations. A titre de comparaison, nous avons aussi représenté la bicorrélation d'un signal synthétique créé à partir de la convolution d'une réflectivité correspondant à un processus aléatoire de densité de probabilité non-symétrique (donc non Gaussienne) $g_n(k)$ avec une ondelette source correspondant à l'ondelette source moyenne sur l'ensemble des stations, toutes composantes confondues. La réflectivité synthétique $g_n(k)$ est créée à partir d'un signal aléatoire Gaussien $g_g(k)$ suivant la relation :

$$g_n(k) = g_g(k) e^{0.4 g_g(k)} \quad (V-111)$$

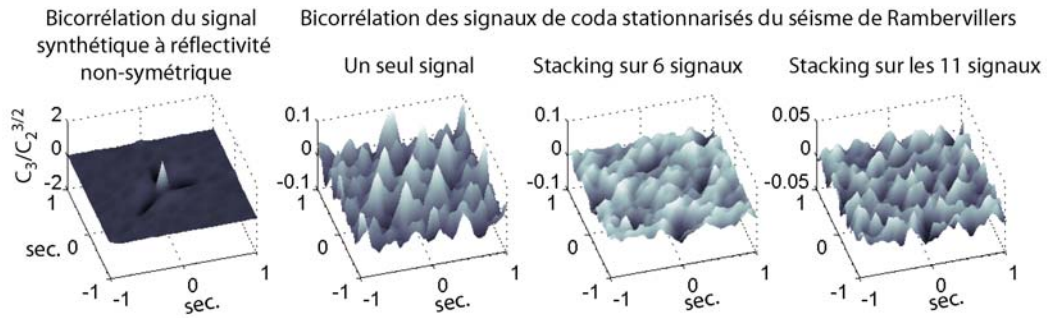


Figure V-6 : Comparaison de la bicorrélation d'un signal synthétique de distribution de probabilité non symétrique avec la bicorrélation de la coda du séisme de Rambervillers, moyennée sur l'ensemble des stations.

La Figure V-7 présente d'ailleurs les différentes caractéristiques de ce signal synthétique comme la forme de l'ondelette source « moyenne » et la loi de probabilité à la réflectivité $g_n(k)$.

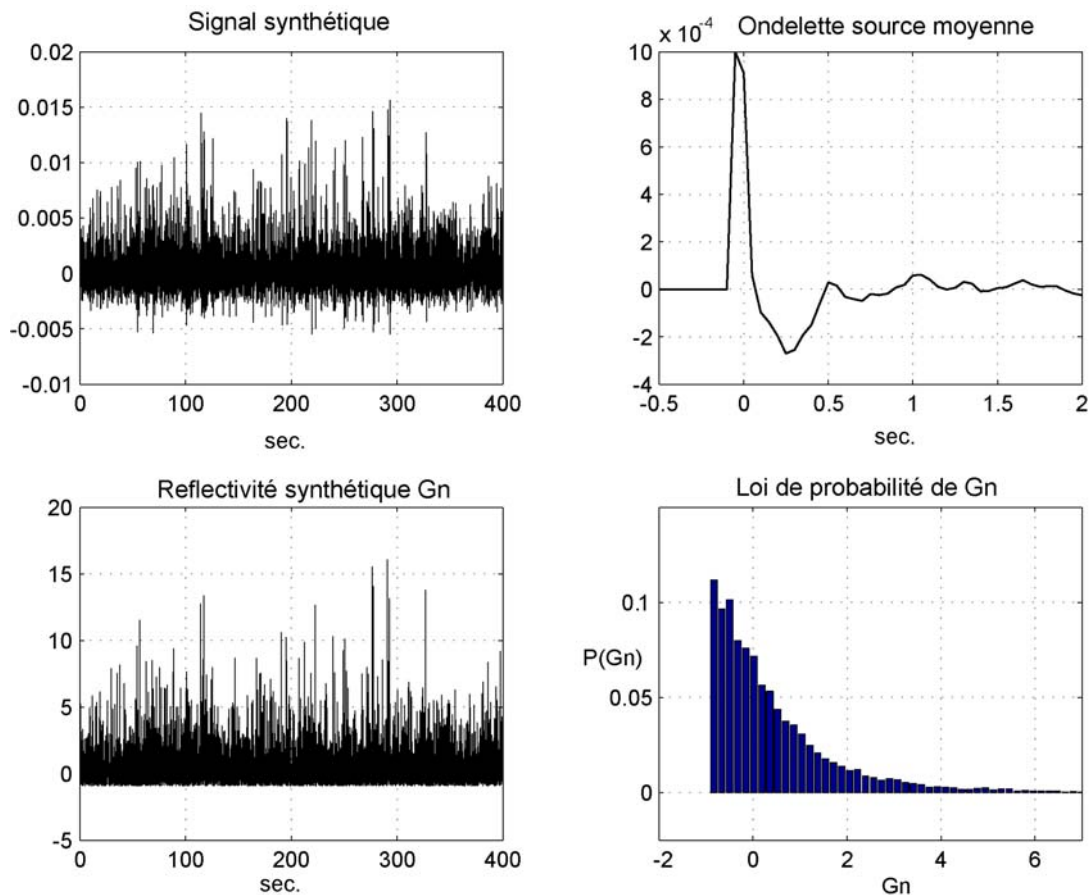


Figure V-7 : Caractéristique du signal synthétique de loi de probabilité non-symétrique et d'ondelette source égale à la moyenne des ondelettes sources obtenues sur toutes les composantes des stations KIZ, HINF,HAU, MEZF et ECH.

Ainsi, contrairement à la bicorrélation du signal synthétique qui fait très clairement apparaître celle de l'ondelette source, le moyennage de la bicorrélation des signaux réels ne permet pas de faire émerger les caractéristiques de la source notamment aux faibles décalages. Au

contraire, l'opération de moyennage a tendance à faire tendre vers 0 l'ensemble des valeurs de la bicorrélation. Cela confirme l'hypothèse d'une bicorrélation nulle et donc la symétrie de la loi de probabilité associée au signal de coda stationnarisé ou celle de sa réflectivité de coda, comme on peut le voir sur la Figure V-8. Par conséquent, la bicorrélation du signal de coda est donc nulle ou très faible, et ne nous permet pas d'extraire l'information sur la phase de l'ondelette source. Nous sommes donc contraints d'utiliser les statistiques d'ordre supérieur pair telles que la tricorrélation.

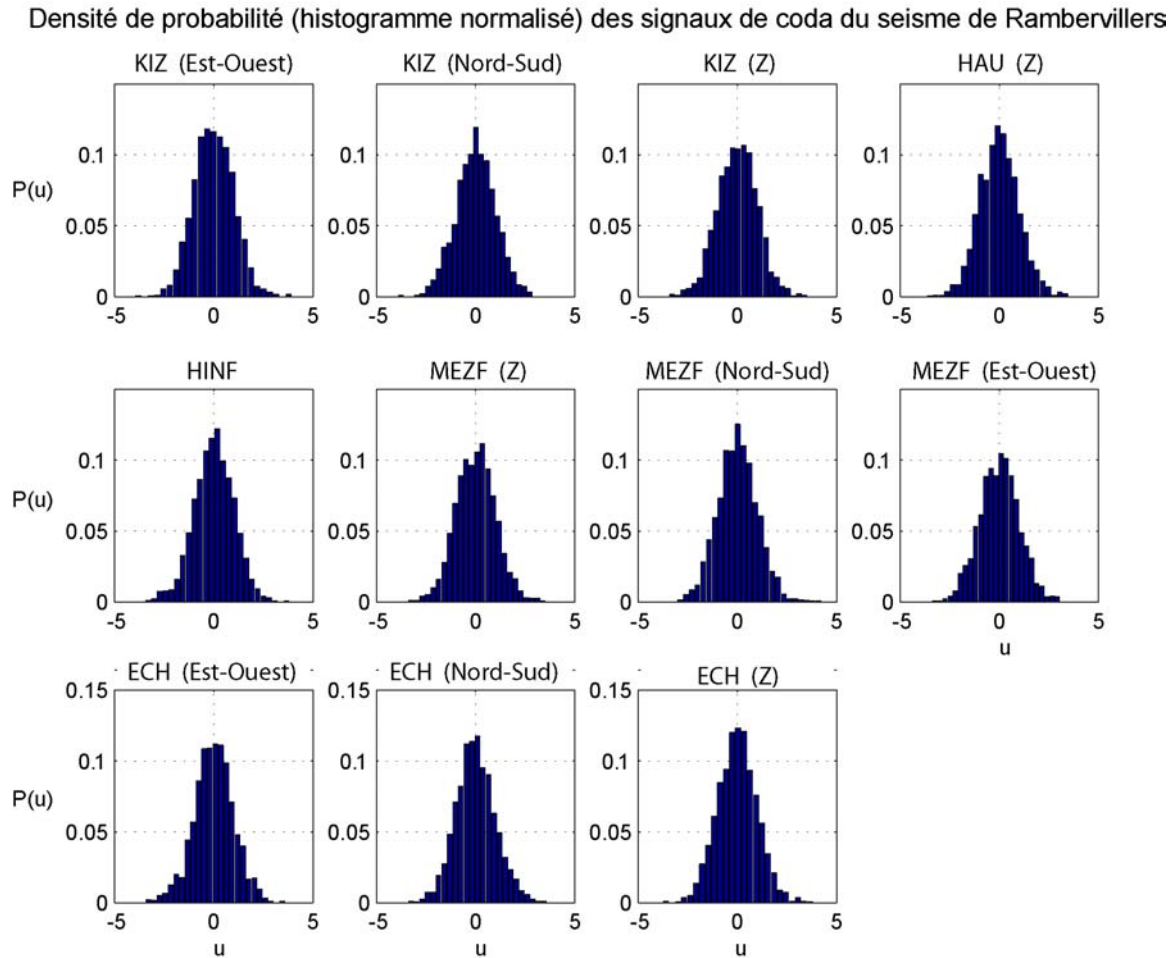


Figure V-8 : Histogrammes normalisés par le nombre total d'échantillons de l'ensemble des signaux de coda stationnarisés de Rambervillers : la densité de probabilité est quasiment symétrique.

V.5.4 Calcul de la tricorrélation

Comme pour la bicorrélation, nous avons obtenu une estimation de la tricorrélation à partir des relations (V-107). La tricorrélation étant une fonction à trois variables, nous nous contenterons de représenter ses valeurs sur le plan particulier $\tau_3=0$ (Figure V-9). En effet, tout comme pour la corrélation, la tricorrélation présente des valeurs maximales proches de l'origine des temps, c'est-à-dire pour des retards nuls.

Les tricorrélations ne font pas apparaître de fortes valeurs proches de l'origine (Figure IV-9). De même que pour la bicorrélation, une telle absence d'information peut être due, soit à une forte variance d'estimation liée à la présence d'un bruit Gaussien, soit à une valeur nulle du kurtosis de u_N .

Dans le cas où les composantes Gaussiennes u_G et non-Gaussienne u_N de $u(t)$ sont indépendantes (équation V-104), la variance de l'estimation de $C_{u(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ est de la forme suivante :

$$\text{Var}[C_{u(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)] = \text{Var}[C_{u_G(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)] + \text{Var}[C_{u_N(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)] \quad (\text{V-112})$$

Or d'après (V-109), la variance du kurtosis d'un processus Gaussien est de l'ordre de $24/N$. Ainsi puisque nous avons effectué l'estimation de la tricorrélation sur des signaux comportant 1700 échantillons, l'écart-type engendré par la présence du processus Gaussien u_G sur l'estimation de la tricorrélation normalisée est de l'ordre de 0.12. Cette valeur est d'ailleurs du même ordre de grandeur que les variations d'amplitude observées sur les tricorrélations ≈ 0.2 (Figure V-9). Par conséquent, le signal non-Gaussien u_N , s'il existe, a un kurtosis inférieur ou égal à 0.2.

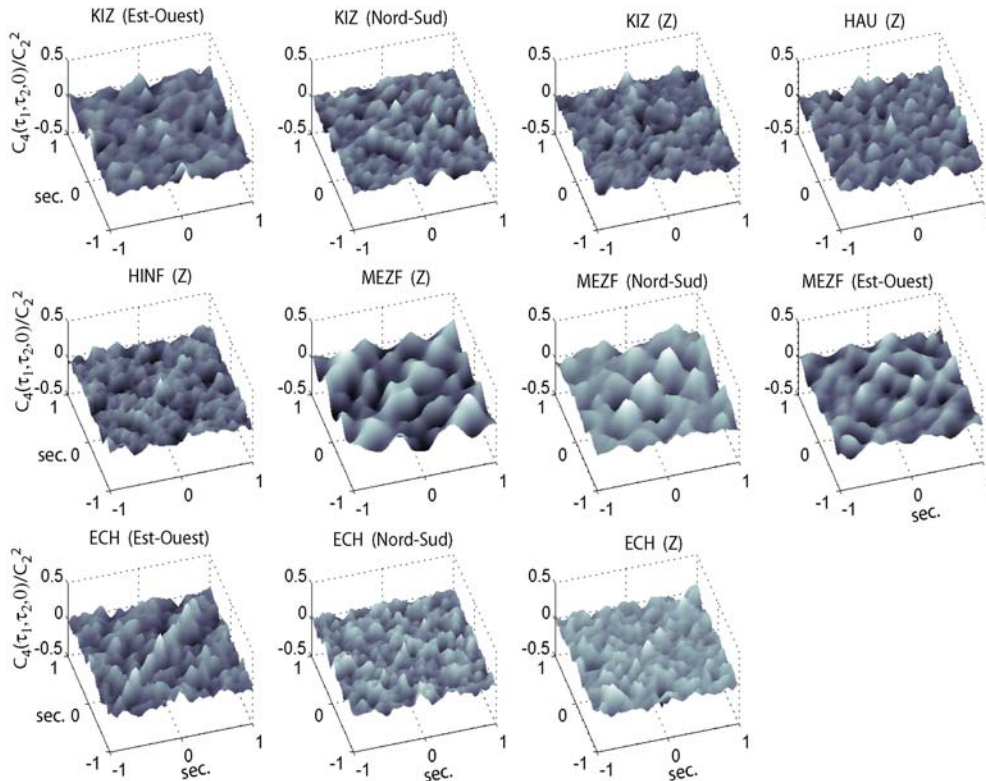


Figure V-9 : Tricorrélation $C_{u4}(\tau_1, \tau_2, 0)$ des signaux de coda stationnarisés du séisme de Rambervillers.

Ainsi, afin d'améliorer le rapport signal sur bruit, nous avons moyenné les tricorrélations obtenues à partir des 11 enregistrements de toutes les composantes des stations. Une telle opération nous permet de diminuer la variance d'estimation de la tricorrélation (équation V-110 transposée à l'ordre 4) si on peut faire l'hypothèse d'une part qu'au premier ordre, l'ondelette source est la même sur toutes les stations, et d'autre part, que les différents signaux de coda sont indépendants.

La similitude des ondelettes sources à phase minimale obtenues lors de l'étude du séisme de Rambervillers nous permet de considérer, qu'en première approximation, on peut considérer que les ondelettes sources réelles sont identiques.

Pour ce qui est de l'indépendance des signaux de coda, celle-ci est difficile à vérifier puisque qu'elle nécessite la décorrélation à tous les ordres. Néanmoins, on peut tout de même vérifier une condition nécessaire (mais non suffisante) à l'indépendance, comme la décorrélation à l'ordre deux. La Figure V-10 présente le maximum d'auto ou intercorrélations des signaux de coda stationnarisés. Le maximum des fonctions d'intercorrélations entre stations ou même entre les différentes composantes d'une même station, est au moins d'un ordre de grandeur inférieur au maximum des fonctions d'autocorrélation. Tous nos enregistrements de coda sont donc décorrélés au moins à l'ordre deux que ce soit entre deux stations distinctes conformément à (Toksöz et al., 1991), ou entre les trois composantes d'une même station. Nous ferons donc l'hypothèse d'indépendance de nos signaux.

Comme on peut le voir sur la Figure V-11, le moyennage sur plusieurs enregistrements, nous permet de faire apparaître une composante non nulle de la tricorrélation au voisinage des retards nuls. D'ailleurs, après moyennage, on peut considérer d'une certaine façon que la tricorrélation est calculée non plus sur seulement 1700 échantillons mais plutôt sur $11 \times 1700 = 1.87 \times 10^4$ échantillons. On retrouve l'ordre de grandeur déjà proposé par (Lazear, 1993; Mansar, 1997).

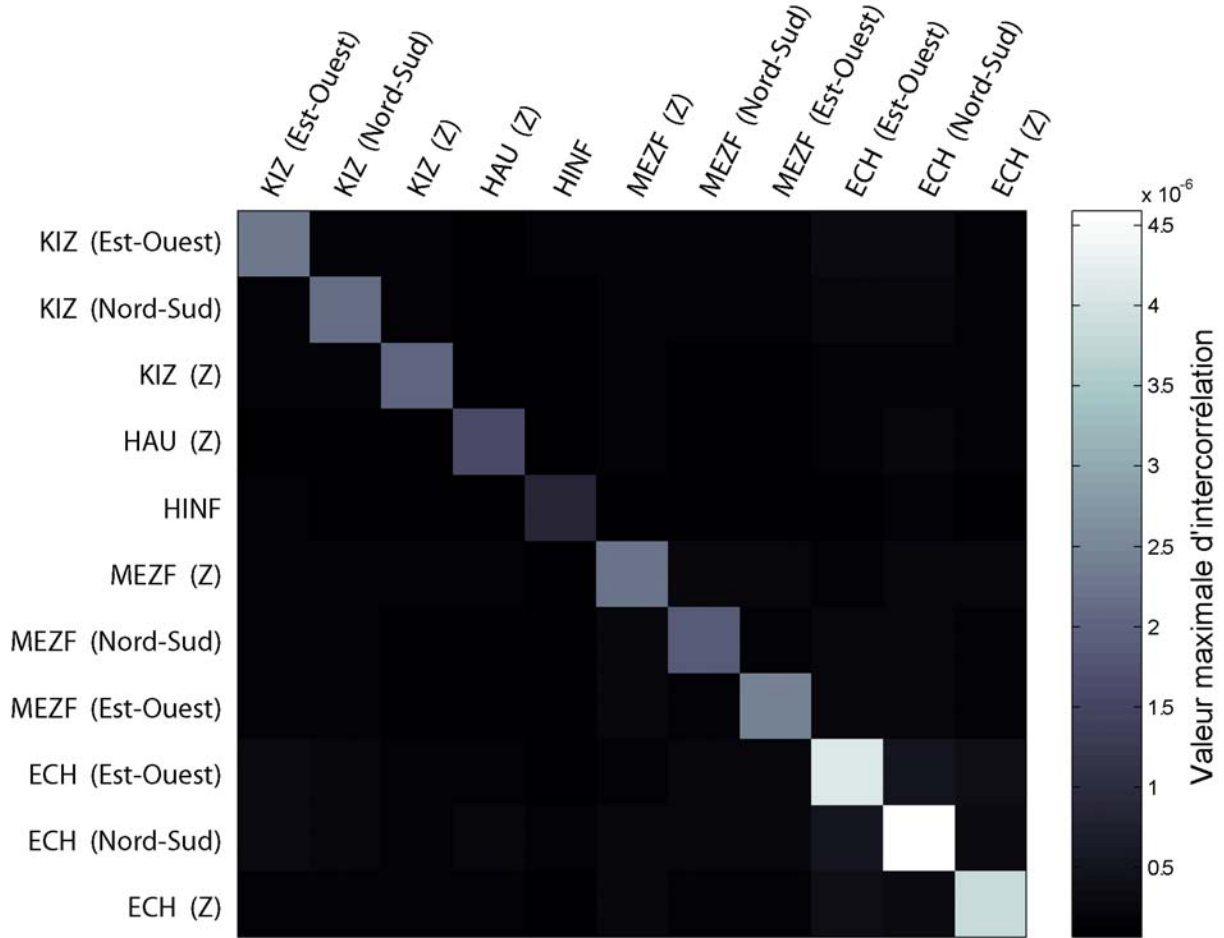


Figure V-10 : Matrice des maximums de l'auto ou intercorrélation des signaux de coda stationnarisés : d'un enregistrement à l'autre les signaux de coda sont bien décorrélés.

Afin de vérifier la validité de la tricorrélation que nous avons obtenue après moyennage, nous avons calculé la tricorrélation d'un signal synthétique non Gaussien. Comme lors de l'étude de la bicorrélation, nous avons créé ce signal synthétique par la convolution de l'ondelette source moyenne $\langle o(k) \rangle$ sur l'ensemble des stations avec une réflectivité synthétique non-Gaussienne $g_n(k)$ obtenue à partir d'une séquence aléatoire Gaussienne $g_g(k)$:

$$g_n(k) = g_g(k) e^{0.4 |g_g(k)|} \quad (\text{V-113})$$

A titre de comparaison nous avons aussi calculé la tricorrélation du signal Gaussien convolué avec l'ondelette source moyenne $\langle o(k) \rangle$. Comme on peut le voir sur la Figure V-12, contrairement au signal Gaussien, les tricorrélations normalisées du signal synthétique et du signal réel moyenné présentent des caractéristiques très semblables au moins pour les valeurs proches de l'origine. En effet, puisque celles-ci sont a priori les valeurs les plus élevées de la tricorrélation, elles présentent donc un meilleur rapport signal sur bruit. Le kurtosis associé à la tricorrélation moyennée des signaux réels est de l'ordre de 0.142. Comme nous l'avons dit précédemment, la présence d'un signal Gaussien entraînant un écart-type de 0.12, il nous était

donc bien impossible de pouvoir observer cette tricorrélation en l'estimant à partir de seulement un seul signal de 1700 échantillons.

On remarque par ailleurs la présence de valeurs systématiquement plus élevées sur la diagonale de la tricorrélation, fait qui n'est pas clairement présent sur la tricorrélation synthétique. Même si des vérifications supplémentaires s'imposent, un tel comportement est probablement dû à une mauvaise correction des termes d'ordre deux dans (V-107), notamment en raison de ses caractéristiques géométriques bien particulières. D'autre part, on remarquera qu'en raison du trop faible rapport signal sur bruit de notre estimation, il nous est difficile de distinguer très clairement les lobes négatifs dans la tricorrélation du séisme de Rambervillers comme on peut les observer dans la tricorrélation synthétique.

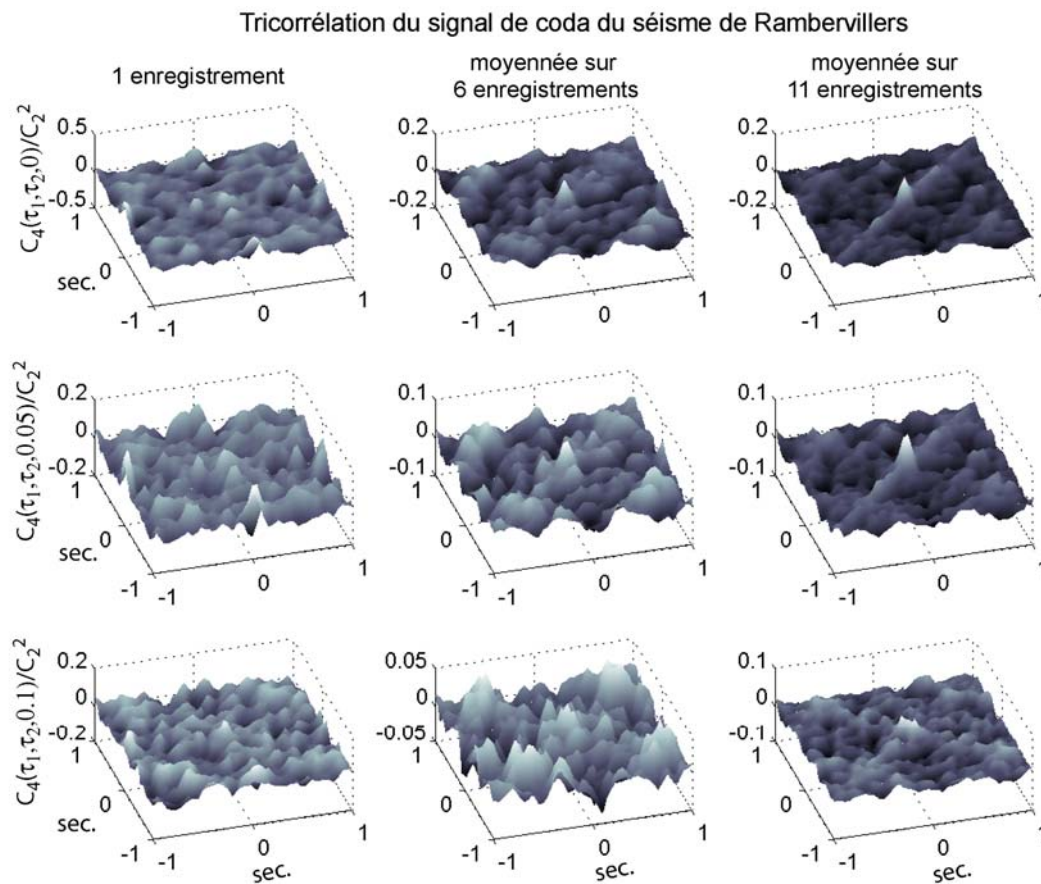


Figure V-11 : Amélioration du rapport signal/bruit de la tricorrélation par moyennage sur l'ensemble des enregistrements à notre disposition : apparition d'une composante non nulle de la tricorrélation pour différentes valeurs de τ_3 .

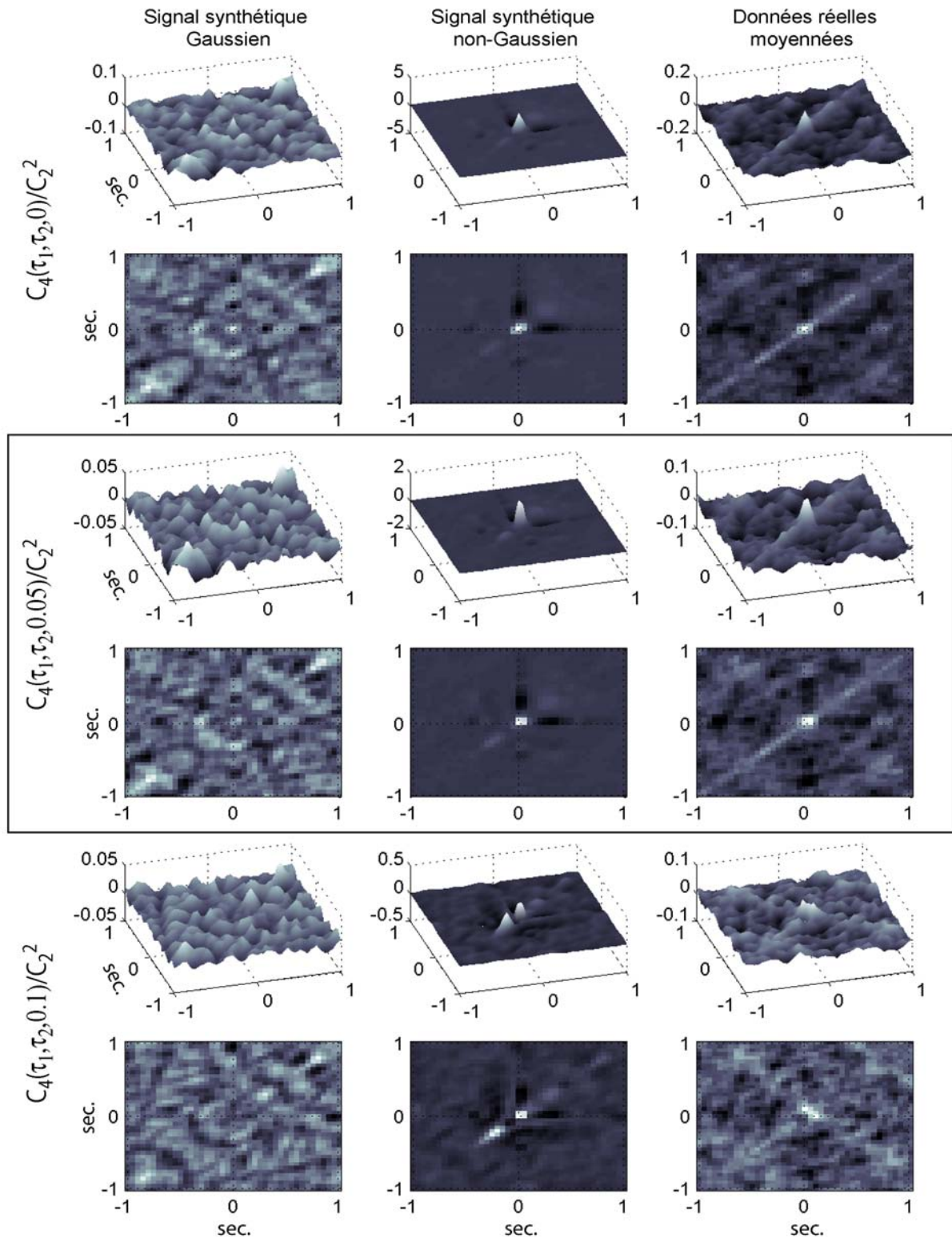


Figure V-12 : Comparaison de la tricorrélation calculée sur trois types de signaux : signal aléatoire synthétique Gaussien, signal aléatoire synthétique non-Gaussien et tricorrélation moyenne du signal de coda du séisme de Rambervillers.

Même si ces résultats sont très encourageants, il semble donc encore difficile de pouvoir directement utiliser la tricorrélation que nous avons obtenue sans avoir un meilleur rapport

signal/bruit. Une telle amélioration pourrait être obtenue simplement en utilisant des signaux de coda plus long et en nombre plus important. Ainsi, sous réserve de similarité de la fonction source, il pourrait être intéressant d'intégrer les autres stations allemandes courtes périodes, ainsi qu'une partie des stations large-bande suisse.

D'autre part, même si on arrive à estimer, avec un meilleur rapport signal sur bruit la tricorrélation de l'ondelette source d'un événement sismique, il faut tout de même en extraire sa phase.

V.5.5 Extraction de l'ondelette source du séisme de Rambervillers de la tricorrélation.

On peut distinguer deux classes de méthodes d'estimation de la phase de l'ondelette source à partir de sa tricorrélation : les méthodes « fréquentielles » et les méthodes paramétriques.

Les méthodes fréquentielles consistent tout d'abord à estimer le trispectre, puis à en extraire la phase de l'ondelette en utilisant la relation (V-88). Tout comme à l'ordre deux, l'estimation du trispectre est obtenue à partir de la transformée de Fourier à trois dimensions de la tricorrélation apodisée, afin d'en réduire la variance. Même si à l'ordre deux, il a déjà été proposé quelques fonctions d'apodisation (Nikias et Raghuveer, 1987), il n'en est pas de même à l'ordre 4 où tout reste à faire.

L'estimation de la phase proprement dite pourra alors être effectuée à l'ordre 4 par la méthode des projections (Le Roux et al., 1993). Cependant, même si cette méthode est très robuste vis-à-vis des erreurs d'estimation, elle présente l'inconvénient de nécessiter le déroulement de la phase du trispectre, une opération qui peut s'avérer très difficile en présence de bruit. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, aux « méthodes algébriques ».

L'ondelette source étant de durée finie, nous allons nous intéresser essentiellement aux méthodes d'estimation des systèmes MA. Les méthodes algébriques d'estimation de systèmes MA à partir des statistiques d'ordre supérieur furent initiées par (Giannakis, 1987) à l'ordre 2, dont (Boumahdi, 1995) propose une extension à l'ordre 4 :

$$o(i) = \frac{C_{(4)\mu}(q, q, i)}{C_{(4)\mu}(q, q, 0)} \quad \text{avec } i = 0, \dots, q \quad (\text{V-114})$$

où $o(i)$ est l'ondelette source et q sa longueur en nombre d'échantillons.

Cette méthode, appelée algorithme des $C(q,k)$, a été appliquée à la tricorrélation moyennée (Figure V-12) des signaux de coda stationnarisés du séisme de Rambervillers. La Figure

V-13-a) présente les ondelettes obtenues après intégration par rapport au temps (fonction source temporelle en déplacement), pour différentes longueurs a priori : $q=(0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65)$. A titre de comparaison nous avons représenté l'ondelette source obtenue par déconvolution par fonction de Green empirique (Chapitre 4).

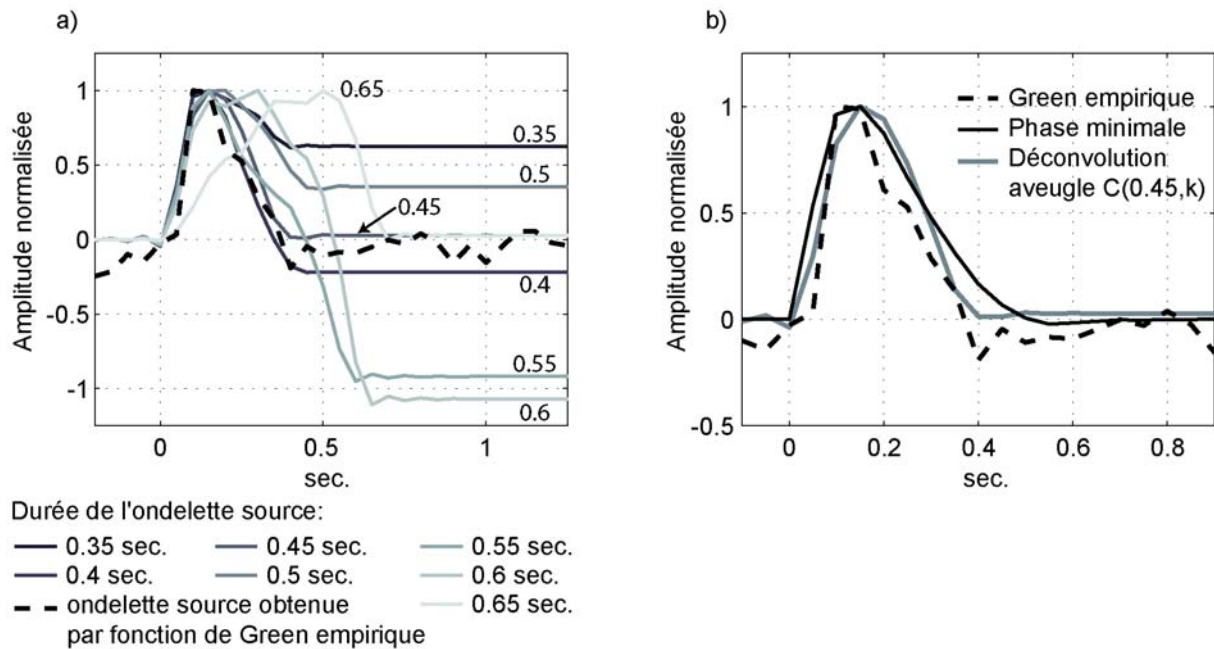


Figure V-13 : Identification de l'ondelette source du séisme de Rambervillers par déconvolution aveugle; a) ondelettes sources obtenues par la méthode des $C(q,k)$ (Giannakis, 1987) pour différentes valeurs de q ; b) Comparaison des ondelettes sources du séisme de Rambervillers obtenues par différentes méthodes de déconvolution.

On distingue trois types de comportements distincts des ondelettes obtenues par déconvolution aveugle en fonction de sa longueur (différentes valeurs de q).

Les ondelettes calculées pour une longueur q de 0.4s et 0.45s sont très similaires à l'ondelette source obtenue par fonction de Green empirique. D'ailleurs, l'ondelette d'une durée de 0.45 seconde ne présente pas d'offset basse fréquence pour les temps supérieur à 0.5s.

Par contre, les ondelettes sources calculées pour une longueur q de 0.35 et 0.5 seconde sont déformées par un bruit basse fréquence engendrant un décalage après intégration. Néanmoins, la forme générale de ces ondelettes sources n'étant pas altérée, il suffirait de leur appliquer le même type de correction par une fonction affine, que nous avons utilisée dans le Chapitre 4, pour qu'elles se superposent à l'ondelette « de Green ».

Enfin, pour des temps supérieurs ou égaux à 0.55 seconde, la forme de l'ondelette estimée, par déconvolution aveugle, est modifiée par rapport à l'ondelette de référence calculée par fonction de Green empirique avec l'apparition d'un déphasage pouvant devenir important.

Ainsi du point de vue de la durée et de l'absence d'offset, la meilleure ondelette source « moyenne » du séisme de Rambervillers est celle obtenue pour $q=0.45$ seconde (Figure V-13-b). Elle présente un léger déphasage retard par rapport à l'ondelette à phase minimale. D'autre part, elle est légèrement plus courte. Cependant le rapport signal sur bruit de la tricorrélation est probablement encore trop faible pour pouvoir avoir des résultats très fiables d'autant plus que l'algorithme des $C(q,k)$ est très sensible aux erreurs d'estimation. Une solution consisterait à mettre en oeuvre l'algorithme de (Comon, 1992) qui utilise l'ensemble des valeurs de la tricorrélation afin d'estimer l'ondelette $o(k)$:

$$o(k)C_{u(4)}(l, m, q) - o(l)C_{u(4)}(k, m, q) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq l \leq q \quad \text{et} \quad 0 \leq m < q \quad (\text{V-115})$$

Néanmoins, ces résultats nous montrent que le signal de coda stationnarisé et donc sa réflectivité associée sont des signaux non gaussiens puisqu'ils présentent une tricorrélation non nulle. Cependant, les valeurs très faibles de la tricorrélation nécessiteront d'utiliser des signaux très longs pour pouvoir réduire la forte variance des statistiques d'ordre supérieur et donc celle de l'ondelette source estimée. C'est d'une certaine façon pour contourner cet inconvénient que nous avons appliqué les méthodes de déconvolution aveugles par optimisation où l'ondelette source est estimée à partir des statistiques d'ordre 2.

V.6 Méthode d'optimisation : maximisation du Kurtosis

V.6.1 Principe théorique de la méthode

Dans le Chapitre 2, nous avons vu que l'autocorrélation d'un processus aléatoire associé à un filtre $o(n)$ de type MA (d'ordre N) comporte non seulement les zéros de $o(n)$ mais aussi leurs inverses conjugués par rapport au cercle unité. Pour identifier complètement $o(n)$, il nous faudra donc choisir dans chacune des $(N-1)$ paires de zéros en inverses conjugués par rapport au cercle unité, les zéros qui appartiennent réellement à $o(n)$.

Les méthodes de déconvolution aveugle par optimisation consistent donc à choisir un ensemble de $(N-1)$ zéros de $C_{o(2)}$ qui maximise ou minimise une fonction coût sensible à la phase de l'ondelette $o(n)$, contrairement aux statistiques d'ordre 2 telle que la corrélation.

Ainsi (Lii et Rosenblatt, 1982), puis plus tard (Tugnait, 1987), proposent d'identifier l'ondelette source $o(n)$ en choisissant les zéros de son autocorrélation qui minimisent une fonction coût basée sur les propriétés statistiques d'ordre supérieur à 2. Dans le cas de signaux à densité de probabilité symétrique dont les statistiques d'ordre 3 sont nulles, ils définissent une fonction coût basée sur la tricorrélation :

$$K(\hat{o}(i)) = \sum_l \sum_m \sum_n [C_{y(4)}(l, m, n | \hat{o}(i)) - \hat{C}_{y(4)}(l, m, n)]^2 \quad (V-116)$$

$K(\hat{o}(i))$ représente donc l'erreur quadratique moyenne sur l'ensemble des retards l, m, n entre la tricorrélation $C_{y(4)}(l, m, n | \hat{o}(i))$ de l'ondelette source $\hat{o}(i)$ estimée à partir des zéros de $C_{(2)o}$, et la tricorrélation estimée $\hat{C}_{y(4)}(l, m, n)$ du signal $y(t)$. Plutôt que d'utiliser l'ensemble des valeurs des cumulants d'ordre supérieur qui est fortement redondant (paragraphe V.3.4), (Boumahdi, 1996) inspiré par le travail de (Shalvi et Weinstein, 1990) propose d'utiliser comme critère d'optimisation le kurtosis. L'algorithme que propose Bouhmadi pour l'identification aveugle de systèmes MA consiste à choisir parmi les 2^N filtres possibles associés à une autocorrélation donnée, celui qui maximise la valeur absolue du kurtosis.

En effet, (Donoho, 1981), en définissant une relation d'ordre partiel, notée $\bullet \geq$, dans l'ensemble des combinaisons linéaires de signaux aléatoires, étudie les transformations des caractéristiques statistiques d'un signal aléatoire lors de son filtrage linéaire. Il montre ainsi que toute opération de filtrage « Gaussianise » un signal aléatoire, c'est-à-dire que toute version filtrée d'un bruit blanc a une loi de probabilité plus proche d'une distribution Gaussienne que le bruit blanc original lui-même. Inversement, le bon filtre inverse sera donc celui qui nous permettra d'identifier la séquence d'entrée la plus éloignée d'un bruit blanc Gaussien. David Donoho suggère par conséquent qu'un critère admissible pour l'identification « aveugle » est un critère K qui respecte la relation d'ordre $\bullet \geq$:

$$x \bullet \geq y \Leftrightarrow K(x) \geq K(y) \quad (V-117)$$

comme les cumulants standardisés tel que le kurtosis par exemple.

On peut d'ailleurs montrer d'une façon générale que les cumulants d'ordre supérieur à deux de tout signal correspondant au filtré linéaire du bruit blanc $x(n)$ non-Gaussien, sont plus proches de 0 que les cumulants de ce bruit blanc d'entrée $x(n)$.

Ainsi (Shalvi et Weinstein, 1990), puis plus généralement (Cadzow, 1996), proposent que la recherche des extremums des cumulants standardisés constitue un bon critère d'identification aveugle de système à phase non minimale. D'un point de vue géophysique, l'utilisation de critères statistiques d'ordre supérieur a été initiée par (Wiggins, 1978), puis reprise par (Oldenburg et al., 1981; White, 1988). La méthode itérative de déconvolution que Wiggins développa : déconvolution par minimisation de l'entropie, consiste à rechercher l'ondelette source par maximisation du kurtosis. L'inconvénient majeur de son algorithme, c'est qu'il

conduit à une équation non linéaire et qu'il estime l'ondelette source directement à partir des statistiques d'ordre supérieur qui, comme on l'a vu, ont une forte variance.

En s'inspirant d'un exemple fourni par (Lacoume et al., 1997), nous allons tenter d'illustrer ces propos à partir d'un exemple de déconvolution aveugle par maximisation du Kurtosis. Nous avons créé un signal aléatoire $y(n)$ par convolution d'une ondelette MA de 6 échantillons (exemple fig Chapitre 1) avec un bruit blanc non-gaussien $x(n)$ de kurtosis supérieur à 6 (Figure V-14 a). Conformément à Donoho, le signal filtré $y(n)$ présente un kurtosis de l'ordre de 4.25, qui est inférieur d'un facteur 2.3 à celui de $x(n)$. Le signal filtré $y(n)$ est donc plus proche d'un signal gaussien, dont le kurtosis est nul, que le signal initial $x(n)$. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, à cette ondelette $o(n)$, on peut associer 8 ondelettes $o_i(n)$ spectralement équivalentes (Figure V-14 b). Nous avons ensuite déconvolué le signal $y(n)$ par chacune de ces ondelettes spectralement équivalentes. On a ainsi obtenu 8 bruits blancs ou réflectivités distinctes dont on a calculé le kurtosis. Comme on peut le voir sur la Figure V-14 b), l'ondelette $o(n)$ (c'est à dire $o_3(n)$) est bien celle qui nous fournit la réflectivité possédant le kurtosis le plus élevé. En effet, après déconvolution par $o_i(n)$, la réflectivité estimée $\hat{x}(n)$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\hat{x}_i(n) = x(n) * o(n)^{-1} o_i(n) \quad (\text{V-118})$$

où $*^{-1}$ représente l'opération de déconvolution.

Ainsi, $\hat{x}_i(n)$ correspond donc au signal $x(n)$ filtré par $o(n)^{-1} o_i(n)$. Son kurtosis sera donc inférieur ou égal à celui de $x(n)$ (Figure V-14-). Ils seront égaux seulement lorsque $\hat{x}_i(n)$ et $x(n)$ sont égaux, c'est à dire quand :

$$o(n)^{-1} o_i(n) = \delta(n) \Leftrightarrow o(n) = o_i(n) \quad (\text{V-119})$$

Ces méthodes d'optimisation estiment les caractéristiques de l'ondelette source grâce aux statistiques d'ordre 2. Elles auront donc a priori une meilleure précision que les méthodes basées uniquement sur les statistiques d'ordre supérieur qui présentent une plus forte variance d'estimation. Cependant, leur limitation principale provient du temps de calcul qui varie en loi puissance avec le nombre d'échantillons de l'ondelette. En effet, pour une ondelette comportant N échantillons, on doit examiner 2^N combinaisons de zéros.

Enfin, avant de tester la méthode de déconvolution aveugle par maximisation du kurtosis de Boumahdi sur les données réelles, nous avons voulu tester sa fiabilité sur des signaux synthétiques.

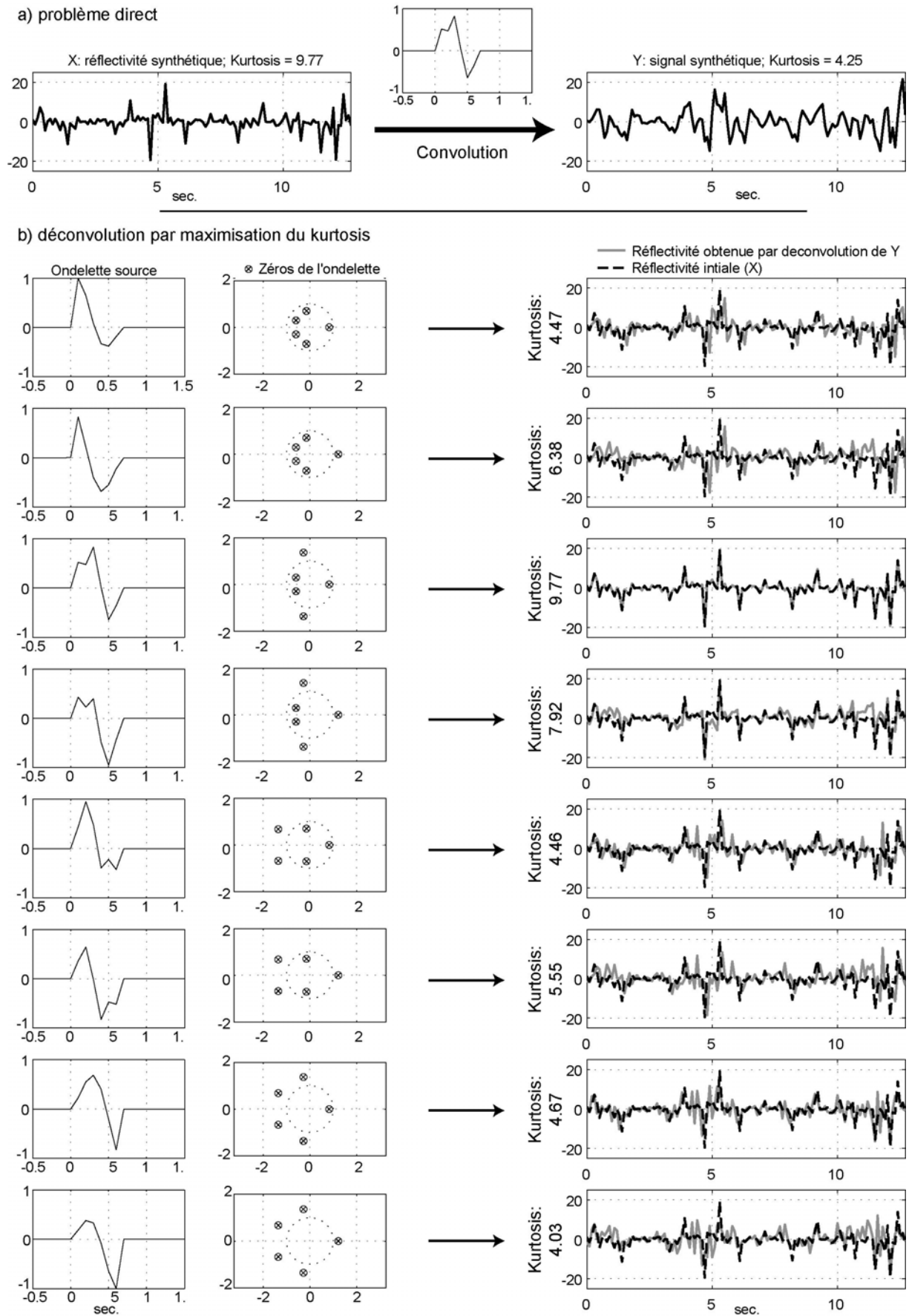


Figure V-14 : Exemple de déconvolution aveugle par maximisation du kurtosis.

V.6.2 Pouvoir d'identification de la déconvolution aveugle par maximisation du kurtosis

V.6.2.1 Création des signaux synthétiques

Nous avons créé des signaux synthétiques $y(n)$ suivant un modèle analogue à celui choisi pour le signal de coda, qui consiste à le considérer comme la somme d'un bruit gaussien x_G avec un bruit non-gaussien x_N , tous deux filtrés par la même ondelette source $o(n)$. Le bruit non-gaussien est choisi sur-gaussien, c'est-à-dire que son kurtosis est supérieur à 0, conformément à ce qui est observé sur les signaux réels (Paragraphe V.5). Le critère d'optimisation consistera donc par conséquent à maximiser le kurtosis de la réflectivité estimée $\hat{x}(n)$.

Nous avons synthétisé des réflectivités $x(n)$ ($x=x_G+x_N$) avec 4 rapports de puissance signal non-gaussien/signal gaussien $R_{N/G}$ de 0.3, 0.5, 1 et 10. Pour chacun de ces rapports de puissance, nous avons créé 25 réflectivités distinctes que nous avons convoluées avec 20 ondelettes sources $o(n)$ différentes de type MA d'ordre 10. Ainsi pour chacun des 4 rapports de puissance $R_{N/G}$, on a créé 500 signaux différents dont on va extraire l'ondelette « source » par déconvolution aveugle par maximisation du Kurtosis. De plus, nous avons effectué cette étude successivement sur des signaux comportant 2500 et 10000 échantillons.

V.6.2.2 Algorithme d'identification

L'algorithme que nous avons utilisé correspond à celui développé par (Boumahdi, 1995; Boumahdi, 1996) pour l'identification aveugle de filtre ARMA par maximisation du Kurtosis. L'ondelette source étant de durée finie, son effet sur la « réflectivité » du signal de coda est assimilable à l'effet d'un filtre de type MA. Nous avons donc utilisé une version MA de l'algorithme de Boumahdi, qui se décompose en deux étapes :

La première consiste à déterminer l'ondelette source à phase minimale $o_{min}(n)$. Pour ce faire nous avons utilisé l'algorithme de déconvolution à phase minimale basé sur l'autocorrélation et les relations de Bode-Bayard (Chapitres 2, 3 et 4).

La deuxième étape consiste, après avoir calculé les zéros de $o_{min}(n)$, à rechercher quelle combinaison de zéros de $o_{min}(n)$ ou de leurs inverses conjugués par rapport au cercle unité permet de maximiser le kurtosis de la réflectivité estimée $\hat{x}(n)$.

D'autre part, dans l'application aux données réelles se pose le problème de la détermination de la longueur de l'ondelette source. Nous avons adopté 2 points de vue différents :

- Soit on considère que l'on a une bonne estimation de la durée de l'ondelette source à partir de celle de son équivalent à phase minimale. Dans ce cas, on cherchera, dans le cadre de nos simulations, l'ondelette de 10 échantillons (0.5 secondes) qui maximise le kurtosis de $\hat{x}(n)$.
- Soit on considère que la longueur ou durée de l'ondelette source est inconnue, ou connue seulement avec une certaine précision. Dans ce cas, on recherchera la véritable longueur de source en utilisant comme critère le kurtosis (Boumahdi, 1995; Boumahdi, 1996). L'ondelette source $o(n)$ sera donc celle qui, parmi toutes les combinaisons de zéros de toutes les ondelettes équivalentes à phase minimale de longueur différente, maximisera le kurtosis de $\hat{x}(n)$. Si on appelle l la longueur de l'ondelette optimale, celle-ci pourra aussi être notée de la forme suivante : $o_l(n)$.

V.6.2.3 Résultats

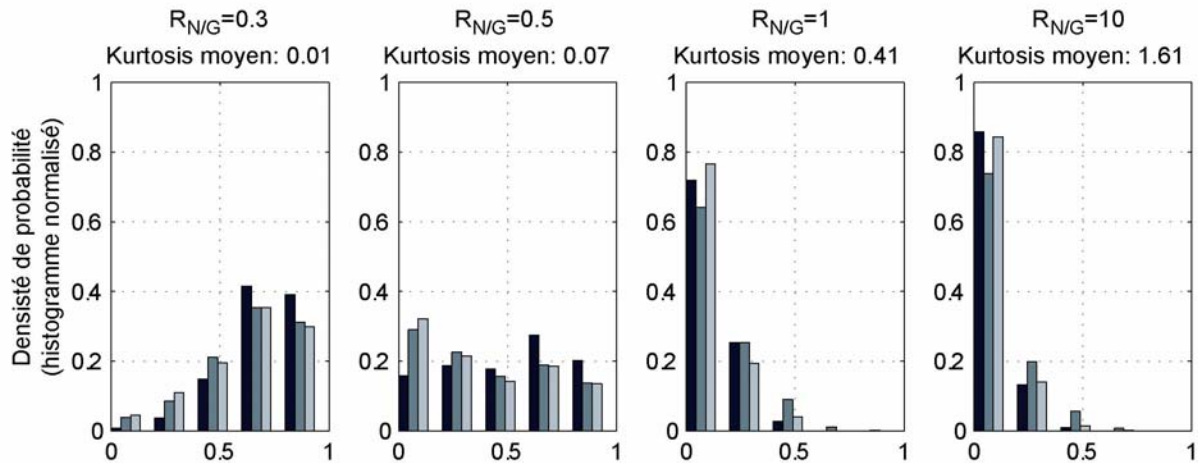
Nous avons ainsi appliqué cet algorithme d'estimation sur l'ensemble des 500 signaux que nous avons synthétisés pour chacun des 4 rapports de puissance $R_{NG/G}$. La déconvolution aveugle ne nous permettant d'identifier un signal qu'à un facteur d'amplitude et un décalage près, nous avons calculé l'erreur d'estimation de l'ondelette source après l'avoir normalisée puis recalée sur l'ondelette initiale.

Les différents graphiques de la Figure V-15-a) présentent la probabilité d'estimer la fonction source avec un certain niveau d'erreur, pour différents rapports $R_{NG/G}$ et en utilisant un signal synthétique de 2500 échantillons. On a considéré 5 niveaux d'erreur normalisée de l'ondelette source estimée : inférieure à 20%, comprise entre 20 et 30%, entre 40 et 60%, entre 60 et 80%, et enfin comprise entre 80 et 100%. La Figure V-15-b) représente tout comme la Figure V-15-a), la probabilité d'erreur d'estimation de l'ondelette source, mais pour un signal synthétique comportant 10000 échantillons.

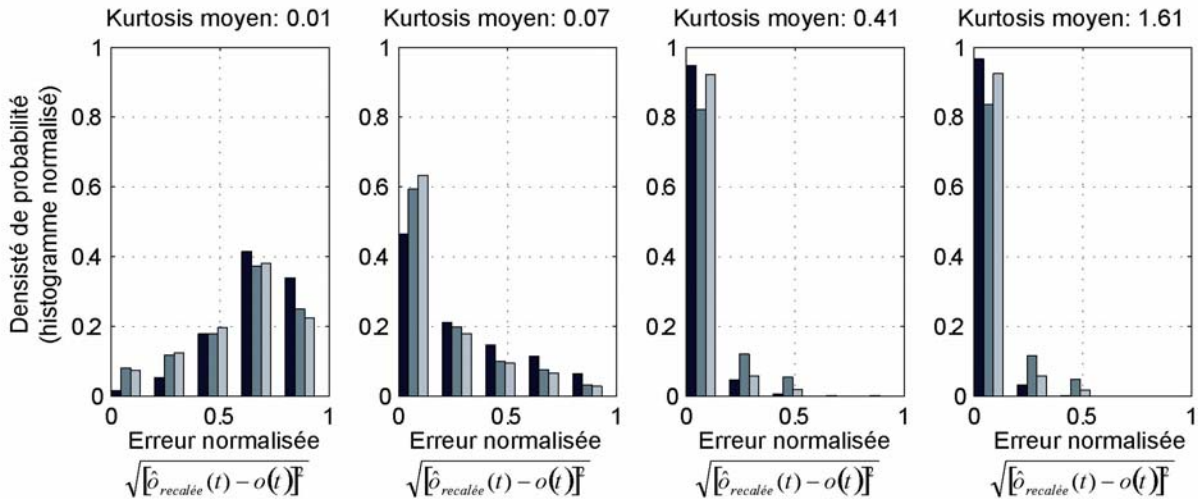
D'une façon générale, on remarque tout d'abord que la méthode ne donne pas toujours une solution avec une erreur relative inférieure à 20%. D'ailleurs, comme on peut le voir sur la Figure V-15, en dessous d'un certain seuil de kurtosis, c'est-à-dire lorsque le signal est trop proche du processus gaussien, la méthode n'est plus capable d'estimer correctement l'ondelette source ($R_{NG/G}=0.3$). D'autre part, comme nous le montrent les probabilités associées cas $R_{NG/G}=0.5$, la perte de résolution due à un faible kurtosis peut-être compensée par une estimation à partir de signaux plus longs. En effet, en quadruplant la longueur des signaux, la probabilité d'obtenir une solution avec une erreur inférieure à 20% passe de 30% à

plus de 60%. D'ailleurs d'une façon générale la probabilité d'estimer l'ondelette source avec une erreur inférieure à 20% est plus grande lorsque on utilise un signal plus long. Tout se passe comme si il y avait un compromis entre la longueur du signal utilisé et son niveau de kurtosis. Un signal de faible kurtosis nécessitera pour obtenir une bonne résolution d'être plutôt long tandis qu'un signal de kurtosis plus fort fournira tout de même une bonne solution avec des signaux plus courts.

a) Signal synthétique déconvolué de 2500 échantillons



b) Signal synthétique déconvolué de 10000 échantillons



Légende: Critère d'optimisation

- Maximum du kurtosis, durée de l'ondelette source $\in [5 \ 15]$ échantillons.
- Maximum du kurtosis, durée de l'ondelette source de 10 échantillons.
- Maximum du Kurtosis, durée de l'ondelette source $\in [9 \ 11]$ échantillons.

Figure V-15 : Etude du pouvoir d'estimation de la déconvolution aveugle par maximisation du kurtosis sur des signaux synthétiques comportant 2500 échantillons a) ou 10000 échantillons b). De gauche à droite, pour 4 rapports de puissance Signal Non-Gaussien/Signal Gaussien $R_{N/G}$, probabilité d'estimer l'ondelette source avec une erreur normalisée appartenant à 5 intervalles : inférieure à 20%, comprise entre 20 et 40%, entre 40 et 60%, entre 60% et 80%, et enfin supérieure à 80%.

Si on compare maintenant les résultats obtenus avec les différents critères d'optimisation, on remarque que dans l'ensemble, ils ont un comportement similaire. Néanmoins, lorsque la résolution est faible (faible kurtosis et/ou signaux courts), la méthode optimale est celle consistant à rechercher l'ondelette source dont la longueur appartient à un intervalle de dimension réduite autour d'une longueur de source connue a priori comme la durée de l'ondelette source équivalente à phase minimale. Pour les forts kurtosis et/ou des signaux longs, la tendance s'inverse et c'est le critère qui laisse le plus de liberté d'un point de vue longueur de la source qui nous fournit la meilleure solution.

D'une façon générale, ne pas imposer la dimension de la source a priori mais plutôt la déterminer par maximisation du kurtosis permet donc d'améliorer la résolution de la méthode. Néanmoins, ceci a l'inconvénient de nécessiter des temps de calcul pouvant être très longs.

De plus, dans les cas de faible kurtosis, limiter la recherche de la longueur de la source à un intervalle centré autour par exemple de la durée de l'ondelette source à phase minimale permet d'améliorer les chances de résolution de la méthode.

D'ailleurs, (Longbottom et al., 1988) soulignent déjà ce manque de performance de la déconvolution par maximisation du kurtosis en considérant non seulement l'effet du nombre d'échantillons, mais aussi l'effet de la largeur de bande du signal sur la qualité de l'estimation de son kurtosis.

V.6.3 Application aux signaux de coda stationnarisée du séisme de Rambervillers

Dans le cas du séisme de Rambervillers, on a vu précédemment que le kurtosis du signal de coda est faible de l'ordre de 0.14. D'après les simulations (Figure V-15), la probabilité que la méthode d'optimisation de Boumahdi nous donne une solution avec une erreur inférieure à 20%, est donc comprise entre 30% et 75% pour un signal de 2500 échantillons (supérieur à la longueur des signaux réels). Il semble donc difficile d'obtenir a priori une solution fiable sans utiliser des signaux plus longs.

Nous avons tout de même appliqué l'algorithme de déconvolution aveugle par maximisation du kurtosis aux signaux en vitesse, de la coda stationnarisée des composantes verticales des stations ECH, HAU, HINF, KIZ et MEZF. L'ondelette source estimée a ensuite été intégrée pour obtenir l'ondelette source en déplacement du mouvement sismique.

Nous avons considéré 2 cas. Dans le premier cas, nous avons recherché l'ondelette source optimale possédant une durée comprise entre 0.2 et 1 seconde. Dans le deuxième cas, la durée

de l'ondelette source est considérée comme égale à la durée de l'ondelette source équivalente à phase minimale, ce qui nous permet de limiter nos recherches à l'intervalle $[0.45, 0.55]$. La Figure V-16 a) représente, pour chaque station, les 2 ondelettes sources optimales ainsi obtenues ; à titre de comparaison nous avons représenté l'ondelette source estimée par fonction de Green empirique. La Figure V-16 b) représente, quant à elle, la valeur maximale du kurtosis de la réflectivité de coda estimée pour une ondelette source de longueur donnée. Les longueurs optimales de l'ondelette source recherchée, soit sur l'intervalle $[0.2, 1]$ ou sur l'intervalle $[0.45, 0.55]$, sont repérées par un triangle noir ou gris respectivement.

D'une façon générale, comme le suggéraient les tests sur les données synthétiques, les ondelettes sources obtenues par maximisation du Kurtosis (Figure V-16 a) sont moins stables et souvent bien différentes de l'ondelette source obtenue par fonction de Green empirique. De plus, comme on peut le voir sur la Figure V-16 b), il n'apparaît pas toujours de maximum clair du kurtosis pour une longueur proche de celle de l'ondelette à phase minimale. Les solutions que l'on obtient sur l'intervalle $[0.2, 1]$ semblent favoriser des solutions plus longues qui intègrent du bruit.

Tout comme les méthodes basées sur la tricorrélation, il faudrait être capable d'utiliser simultanément l'ensemble des signaux à notre disposition, en calculant par exemple une ondelette moyenne et en utilisant comme critère d'optimisation le kurtosis de l'ensemble des signaux à notre disposition. L'étude d'une telle méthode est en cours.

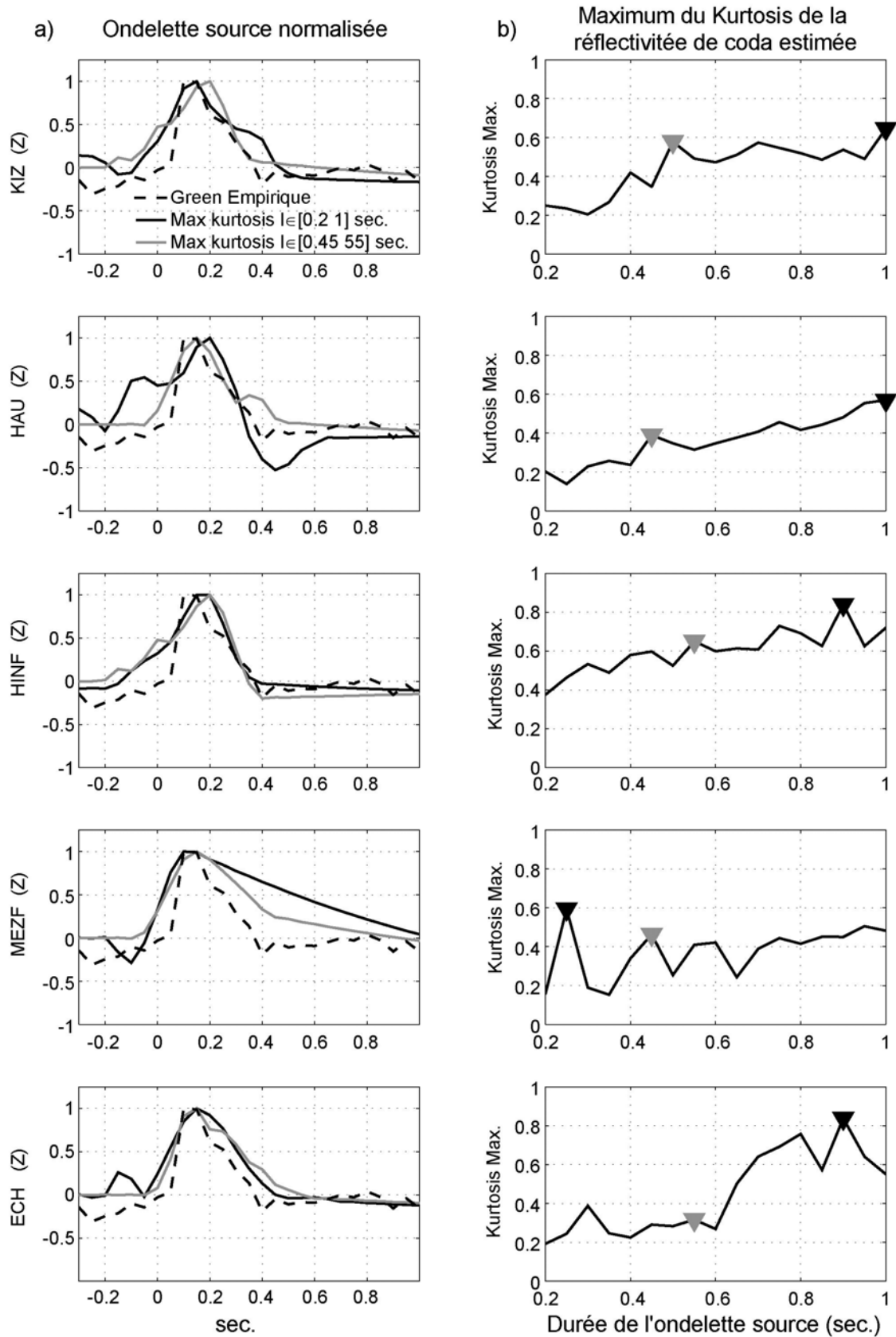


Figure V-16 : a) Fonction source du signal de coda du séisme de Rambervillers obtenue par déconvolution aveugle par maximisation du Kurtosis ; b) Maximum du Kurtosis de la réflectivité de coda estimée pour différentes durées de source ; les triangles représentent les solutions optimales pour une recherche du maximum du kurtosis sur les intervalles $[0.2 \text{ } 1]$ seconde (noir) et $[0.45 \text{ } 0.55]$ seconde (gris).

V.7 Conclusions

Comme l'ont déjà montré plusieurs études, les méthodes de déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur nécessitent pour être performantes des signaux stationnaires longs comportant au moins 10^4 à 10^5 échantillons. Or, comme nous l'avons vu les signaux sismologiques sont, par nature, des signaux transitoires non stationnaires. Ainsi avant de pouvoir appliquer une méthode de déconvolution aveugle notre premier travail a donc été de rétablir la stationnarité du mouvement sismique notamment au niveau de sa coda par déconvolution non stationnaire. La portion de signal de coda utile du séisme de Rambervillers, c'est-à-dire présentant un rapport signal/bruit supérieur à 3, a une durée de l'ordre de 85s et ne comporte donc en moyenne que 1700 échantillons. Nous avons donc dû travailler sur les cumulants moyenné sur l'ensemble des 11 signaux à notre disposition.

L'étude de la bicorrélation nous a permis de vérifier qu'elle ne comporte pas d'information sur l'ondelette source en raison de la symétrie de la loi de probabilité de la réflectivité associée au signal de coda. Ainsi comme la bicorrélation du signal de coda tend vers zéro, nous nous sommes intéressé au cumulant d'ordre 4, la tricorrélation.

Après moyennage, la tricorrélation des signaux de coda du séisme de Rambervillers présente des valeurs non nulles, plus élevées proches de l'origine des temps, avec des caractéristiques similaires à la tricorrélation de l'ondelette moyenne à phase minimale du séisme de Rambervillers. Cependant en raison du faible kurtosis associé à cette tricorrélation, la tricorrélation de l'ondelette source ne sort pas encore complètement du bruit d'estimation et ceci bien que l'opération de moyennage nous permette de calculer la tricorrélation sur plus de 18000 échantillons. Néanmoins, l'application de l'algorithme $C(q,k)$ de déconvolution aveugle, nous permet d'extraire de cette tricorrélation une ondelette source très proche de celle retrouvée par déconvolution par fonction de Green empirique, nous donnant ainsi un argument de plus en faveur du caractère non Gaussien du signal de coda stationnarisée et de la réflectivité associée.

Une perspective à court terme serait d'utiliser les formules de P. Comon afin de stabiliser au maximum l'estimation de l'ondelette en utilisant au mieux l'information disponible de la tricorrélation. D'autre part, il serait intéressant d'utiliser plus de signaux, afin d'améliorer le rapport signal/bruit de l'estimation de la tricorrélation. Enfin, il faudra de préférence utiliser

des signaux large bande car ceux-ci sont mieux adaptés à l'opération de déconvolution (rapport signal/bruit à basse fréquence par exemple).

A plus long terme, il faudrait bien évidemment confirmer le pouvoir d'estimation des statistiques d'ordre supérieur sur d'autres événements présentant des fonctions sources plus complexes et qui ont déjà été identifiées par d'autres méthodes.

En ce qui concerne les méthodes d'optimisation comme nous l'ont montré les simulations sur signaux synthétiques ou les premiers tests sur des données réelles, celles-ci souffrent aussi de la forte variance d'estimation des statistiques d'ordre supérieur dans le sens où le maximum du kurtosis ne nous donne pas toujours la bonne solution.

Pour éviter ce problème, une méthode d'optimisation basée sur l'algorithme de Boumahdi mais utilisant l'ensemble des données à notre disposition est en cours d'investigation.

Chapitre VI Conclusion

L'objectif de cette thèse était de savoir dans quelle mesure nous étions capables, grâce à l'utilisation de méthodes de déconvolution aveugle mono-signal, d'extraire et d'estimer les différentes contributions physiques du signal sismique, source, propagation, et effet de site. En utilisant des développements théoriques et méthodologiques provenant de domaines différents, tels que le traitement du signal, la prospection pétrolière et la sismologie, nous avons pu apporter quelques éléments de réponse à cette question. Afin d'utiliser au mieux les principes de séparation et la théorie de la déconvolution aveugle, il nous a fallu bien sûr adapter les algorithmes existants, ainsi que notre manière d'appréhender les signaux sismologiques.

VI.1 Quelques étapes décisives.

VI.1.1 Stationnarisation du signal de coda

La déconvolution à phase minimale et la déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur ont leurs principes de résolution basés sur le caractère aléatoire stationnaire du signal mis en jeu. Ainsi, il nous a fallu nous démarquer des méthodes classiques d'étude des signaux sismologiques basées sur les arrivées directes. En effet, on a vu que ce type d'ondes n'était pas adapté aux principes de résolution des méthodes de déconvolution aveugle mono-signal, notamment en raison de son caractère transitoire et non stationnaire. Ainsi, l'étape décisive qui nous a permis d'avancer dans la résolution de ce problème d'application des méthodes de déconvolution aveugle mono-signal, c'est **la stationnarisation du signal de coda**. Le signal de coda stationnarisé présente alors toutes les conditions nécessaires à l'application des méthodes de traitement du signal, allant de l'estimation spectrale aux méthodes de déconvolution aveugle mono-signal. Nous avons ainsi été **capables, à partir d'un seul enregistrement au rocher, d'estimer la fonction source de deux types d'événement sismique : l'explosion sous-marine du Kursk et le séisme de Rambervillers**.

VI.1.2 Ecart à la Gaussianité de la réflectivité de coda

Une autre propriété du signal sismique qui a été pour nous décisive quant à l'application des méthodes de déconvolution aveugle, est **l'écart à la Gaussianité du signal de coda stationnarisé et de la réflectivité associée**. En sismologie, il est classiquement admis qu'en raison du théorème de la limite centrale, la réflectivité de coda est un signal Gaussien. Or contrairement à la bicorrélation, les **valeurs non nulles de la tricorrélation** de la coda stationnarisée du séisme de Rambervillers nous ont montré que la réflectivité de coda n'a pas un comportement purement Gaussien. Enfin, de cette tricorrélation, nous avons pu extraire une fonction source du mouvement sismique très similaire à celle obtenue par fonction de Green empirique.

VI.2 Conditions générales de mise en œuvre de la déconvolution aveugle

VI.2.1 Des signaux large-bande...

Les méthodes de déconvolution aveugle nécessitent des **signaux plutôt large bande**. Ainsi, le type de signal le mieux adapté à ces méthodes sera les enregistrements **vélocimétriques large-bande** avec une fréquence d'échantillonnage de l'ordre de 40-60Hz, de façon à pouvoir bien mesurer le contenu fréquentiel d'événements de magnitude inférieure à 3. Les enregistrements **accélérométriques**, même s'il sont plutôt large-bande, ont l'inconvénient de parfois présenter un faible rapport signal/Bruit à basse fréquence. En effet, ce type d'enregistrement nécessite une double intégration afin de retrouver le signal en déplacement. Celle-ci engendre alors une détérioration de la fonction source due à l'amplification du bruit basse fréquence. Les enregistrements courte période, comme nous l'avons vu, sont utilisables mais nécessitent d'être corrigés de la réponse du capteur ; cette correction de capteur peut aussi perturber la résolution en raison de l'amplification du bruit basse fréquence.

VI.2.2 Durée des signaux traités...

En ce qui concerne la durée minimale de signal à utiliser pour les **déconvolutions mono-signal**, elle dépendra du type de traitement ainsi que de la durée de la fonction source à estimer.

L'opération de stationnarisation est basée sur le calcul de Q_{coda} qui, suivant la bande de fréquence étudiée, peut nécessiter l'utilisation de plus de 100s de coda. D'ailleurs, plus on s'intéressera à des fréquences ω basses, plus on devra considérer un signal de coda long pour éliminer l'effet des fluctuations d'amplitude.

La **déconvolution à phase minimale** semble être beaucoup moins exigeante, puisque nous avons obtenu une bonne estimation de la fonction source du Kursk d'une durée de l'ordre de 1s en utilisant seulement 40s de coda stationnarisée.

La **déconvolution aveugle par statistique d'ordre supérieur** est quant à elle beaucoup plus draconienne en ce qui concerne la durée minimale de signal nécessaire (10^4 échantillons d'après (Mansar, 1997)). D'ailleurs, les 95s du signal de coda du séisme de Rambervillers présentant un rapport signal/bruit suffisant à l'application de la déconvolution aveugle par statistique d'ordre supérieur, se sont avérés insuffisants et nous ont obligé à mettre en œuvre un moyennage multi-station de la tricorrélation. Etant donné qu'il semble difficile d'obtenir des enregistrements de coda d'une durée supérieure à quelques centaines de secondes, cette méthode nécessitera inévitablement l'utilisation de plusieurs enregistrements du même événement afin d'effectuer un moyennage multi-station de la tricorrélation. Là encore, cela dépendra de la valeur du kurtosis de la réflectivité de coda.

D'une façon générale, le mode d'application que nous avons mis en œuvre, nécessite des enregistrements sismiques longs où le mouvement du sol est enregistré sur plus de 100s au-delà de 2 fois le temps d'arrivée des ondes S.

VI.2.3 Rapport signal/Bruit...

Il est bien évident que ces méthodes sont sensibles au niveau du rapport Signal/Bruit. En effet, comme les méthodes de déconvolution aveugle mono-signal ne nous permettent pas de supprimer le bruit, il faudra veiller à ne considérer que le signal de coda présentant sur la bande utile un rapport signal/Bruit supérieur, d'une façon générale, au moins à 5.

VI.3 Les résultats de l'application aux données réelles

D'une façon générale, que ce soit sur le Kursk ou sur le séisme de Rambervillers, les ondelettes sources estimées dans cette thèse présentent une bonne stabilité spatiale.

VI.3.1 Le Kursk...

En ce qui concerne le Kursk, l'ondelette source que nous avons obtenue sur la coda des ondes P ou la coda Lg stationnarisée, nous a permis de déterminer non seulement la profondeur de l'explosion de l'ordre de 124 ± 15 m, mais aussi sa charge d'environ 3950Kg en équivalent TNT.

VI.3.2 La fonction source du séisme de Rambervillers...

Concernant le séisme de Rambervillers, la fonction source que nous avons obtenue que ce soit par déconvolution à phase minimale ou par déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur, est très similaire à celle obtenue par fonction de Green Empirique. Elle présente une durée de l'ordre 0.5 ± 0.05 s. Grâce à la connaissance du libre parcours moyen de transport $l^* = 250$ km estimé par (Lacombe et al., 2003), nous avons estimé son moment sismique à environ 1.64×10^{16} N.m correspondant à une magnitude de moment M_w de l'ordre 4.74. D'autre part, en utilisant les formules de Brune (Brune, 1970; Brune, 1971), nous avons obtenu une chute de contrainte de l'ordre de 78 ± 23 bars. Enfin, la comparaison de la largeur des ondelettes sources obtenues sur différentes stations semble montrer une certaine directivité suggérant une propagation de la rupture du Nord vers le Sud.

VI.3.3 Quelques effets de site...

De plus, grâce à la déconvolution Site/Rocher des ondelettes sources à phase minimale des enregistrements accélérométriques du RAP, nous avons mis en évidence la présence d'effets de site dans le signal de coda. Nous avons pu non seulement estimer les fréquences fondamentales de site mais aussi dans certains cas leurs harmoniques. De plus, sous l'hypothèse qu'il s'agit en première approximation d'un milieu 1D stratifié, nous avons pu calculer la réponse impulsionnelle (temporelle) associée à ces effets de site.

VI.4 Perspectives

Il faut rester très humble quant au potentiel de ces méthodes. En effet, d'une part, il subsiste encore un bon nombre de questions sans réponse. D'autre part, ce travail de thèse ne représente que les premiers tests d'applications de méthodes qui restent somme toute assez délicates à mettre en oeuvre.

VI.4.1.1 Fonctions sources plus complexes...

Ainsi, il est bien évident que notre premier travail sera d'appliquer ces différentes méthodes de déconvolution mono-signal à des enregistrements présentant des fonctions sources plus complexes. Notre principal objectif est de vérifier si ces méthodes sont capables d'en extraire toute la complexité. Il est alors très probable que l'on mette en défaut l'hypothèse de phase minimale, ce qui bien sûr renforcera l'intérêt de la déconvolution aveugle par statistiques d'ordre supérieur. D'ailleurs, à ce propos, il serait intéressant de confirmer les caractéristiques de la tricorrélation du séisme de Rambervillers et d'en améliorer l'estimation en utilisant plus de signaux comme ceux issus du réseau large bande Suisse ou le réseau courtes périodes

allemand. D'autre part, il serait nécessaire de stabiliser l'extraction de l'ondelette source de la tricorrélation en utilisant des méthodes plus performantes telles que celles proposées par (Comon, 1992).

VI.4.1.2 Coda et stationnarisation...

En ce qui concerne l'opération de stationnarisation du signal de coda beaucoup de questions restent encore en suspens : Permet-elle réellement de blanchir le terme de réflectivité de coda et de le corriger du terme d'atténuation? Par ailleurs, l'opération de convolution non stationnaire n'est pas une opération commutative : quelle peut être l'influence de cette non commutativité sur l'estimation de la fonction source?

VI.4.1.3 Inversion généralisée...

Une perspective d'application de ces méthodes de déconvolution aveugle mono-signal serait leur intégration dans un algorithme d'inversion généralisée. On pourrait ainsi estimer les effets de site d'un ensemble de stations sans forcément utiliser une station de référence au rocher. Par ailleurs, cela nous permettrait d'étudier la stabilité des fonctions sources estimées ainsi que la blancheur de la réflectivité de coda. De plus, comparée aux méthodes classiques d'inversion généralisée, la déconvolution aveugle du signal de coda stationnarisée présente l'avantage de ne pas nécessiter la connaissance a priori d'un modèle d'atténuation du milieu ou d'une forme spectrale de la fonction source.

VI.4.1.4 Une nouvelle méthode d'estimation de la magnitude...

Nous avons vu, lors de l'étude du séisme de Rambervillers, qu'à partir de la seule connaissance du libre parcours de transport l^* et dans l'hypothèse de blancheur de la réflectivité de coda, nous pouvions estimer le moment sismique par déconvolution à phase minimale. La déconvolution à phase minimale pourrait donc être une méthode simple d'estimation de la puissance d'un séisme. On pourrait estimer alors sa magnitude en ne faisant intervenir qu'un seul paramètre physique constant intrinsèque au milieu.

Références bibliographiques

- Abed-meraim, K., W. Qiu and Y. Hua, (1997). Blind system identification. *Proceedings of the IEEE*, **85**(8): 1310-1322.
- Aki, K., (1969). Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *Journal of geophysical research*, **74**: 615-631.
- Aki, K. and B. Chouet, (1975). Origin of coda waves: source, attenuation, and scattering effects. *Journal of geophysical research*, **80**(23): 3322-3342.
- Aki, K. and P. G. Richards, (1980). *Quantitative seismology; theory and methods*. New York, W. H. Freeman and Company.
- Andrews, D. J., (1986). Objective determination of source parameters and similarity of earthquakes of different size. *Earthquake Source Mechanics*. S. Das, J. Boatwright and C. H. Scholz. Washington D.C., American Geophysical Union: 259-268.
- Arons, A. B., (1954). Underwater explosion shock wave parameters at large distances from the charge. *The journal of the acoustical society of america*, **26**(3): 343-346.
- Bard, P.-Y. (1998). Proceeding of the Second International Symposium on the Effects of Surface Geology on Seismic Motion. *Proceeding of the Second International Symposium on the Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, Japan.
- Bard, P.-Y. and M. Bouchon, (1980). The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. The case of incident SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **70**(4): 1263-1286.
- Barrodale, I., N. R. Chapman and C. A. Zala, (1984). Estimation of bubble pulse wavelets for deconvolution of marine seismograms. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **77**: 331-341.
- Baumont, D., F. Courboulex, O. Scotti, N. S. Melis and G. Stavrakakis, (2002). Slip distribution of the Mw 5.9, 1999 Athens earthquake inverted from regional seismological data. *Geophysical Research Letters*, **29**(15): 1-4.
- Boatwright, J., (1980). A spectral theory for circular seismic sources; simple estimates of source dimension, dynamic stress drop, and radiated seismic energy. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **70**(1): 1-27.
- Boatwright, J., (1991). A general inversion scheme for source, site, and propagation characteristics using multiply recorded sets of moderate-sized earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **81**: 1754-1782.

- Bondon, P. and B. Picinbono, (1990). De la blancheur et de ses transformations. *Traitement du signal*, **7**(5): 385-395.
- Bonilla, L. F., (2000). Computation of Linear and Nonlinear Site Response for Near Field Ground Motion. *Thèse, Universitu of California santa Barbara*, Santa Barbara, **248** pages
- Borcherdt, R. D., (1970). Effects of local geology on ground motion near San Francisco Bay. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**: 29-61.
- Bouchon, M. and K. Aki, (1977). Discrete wave number representation of seismic source wave fields. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **67**: 259-277.
- Boumahdi, M., (1995). Déconvolution aveugle utilisant les statistiques d'ordre supérieur: application à des données sismiques. *Thèse: Institut National Polytechnique de Grenoble*, Grenoble, pages
- Boumahdi, M., (1996). Blind identification using the kurtosis with applications to field data. *Signal Processing*, **48**: 205-216.
- Brillinger, D. R., (1965). An introduction to polyspectra. *Ann. Math. Statist.*, **36**: 1351-1374.
- Brillinger, D. R. and M. Rosenblatt, (1967a). Asymptotic theory of estimates of k-th order spectra. *Spectral Analysis of Time Series:proceedings*. B. Harris. New york, John Wiley& Sons: 153-188.
- Brillinger, D. R. and M. Rosenblatt, (1967b). Computation and interpretation of k-th order spectra. *Spectral Analysis of Time Series:proceedings*. B. Harris. New york, John Wiley& Sons: 189-232.
- Brune, J., N., (1970). Tectonic Stress and the Spectra of seismic Shear waves from earthquakes. *Journal of geophysical research*, **75**(26): 4997-5009.
- Brune, J., N., (1971). Correction. *Journal of geophysical research*, **76**(20): 5002.
- Cadzow, A. A., (1996). Blind deconvolution via cumulant extrema. *IEEE Signal Processing Magazine*, **13**(May): 24-42.
- Campillo, M. and J. L. Plantet, (1991). Frequency dependence and spatial distribution of seismic attenuation in France: experimental results and possible interpretations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **67**: 48-64.
- Campillo, M., J. L. Plantet and M. Bouchon, (1985). Frequency-dependent attenuation in the crust beneath Central France from Lg waves: data analysis and numerical modeling. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **75**: 1395-1411.
- Chandrasekhar, S., (1960). *Radiative Transfert*. New York, Dover.
- Childers, D. G., D. P. Skinner and R. C. Kemerait, (1977). The cepstrum: a guide to processing. *Proceedings of the IEEE*, **65**(10): 1428-1443.

- Chouet, B., K. Aki and M. Tsujiura, (1978). Regional variation of the scaling law of the earthquake source spectra. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **68**(1): 49-79.
- Clayton, R. W. and R. Wiggins, (1976). Source shape estimation and deconvolution of teleseismic bodywaves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **47**: 151-177.
- Cole, R. H., (1948). *Underwater explosion*. New York, Dover Publications, Inc.
- Comon, P., (1992). MA identification using fourth order cumulants. *Signal Processing*, **26**(3): 381-388.
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, (1965). An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, **19**: 297-301.
- Cotton, F. and M. Campillo, (1995). Frequency domain inversion of strong motions: Application to the 1992 Landers earthquake. *Journal of geophysical research*, **100**(B3): 3961-3975.
- Courboux, F., A. Santoyo, J. F. Pacheco and S. K. Singh, (1998). The 14 september 1995 (M=7.3) Copala, Mexico, earthquake: A source study using teleseismic, regional, and local data. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **87**: 999-1010.
- Das, S. and K. Aki, (1977). Fault plane with barriers: a verstaile earthquake model. *Journal of geophysical research*, **82**: 5658-5670.
- Das, S. and B. V. Kostrov, (1990). Inversion for Seismic Slip Rate History and Distribution With Stabilizing Constraints: Application to the 1986 Andreanof Islands Earthquake. *Journal of geophysical research*, **95**(B5): 6899-6913.
- Das, S. and P. Suhadolc, (1996). On the inverse problem for earthquake rupture: The Haskell-type source model. *Journal of geophysical research*, **101**(B3): 5725-5738.
- De Larminat, P., (2002). *Analyse des systèmes linéaires*. Paris, Hermes Science.
- Deichmann, N., (1999). Empirical Green's Functions: A Comparison between Pulse Width Measurements and Deconvolution by Spectral Division. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **89**(1): 178-189.
- Demoment, G., (1989). Image reconstruction and restoration: overview of common estimation structures and problems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **37**(12): 2024-2036.
- Der, Z. A., R. H. Shumway and A. C. Lees, (1987). Multi-channel deconvolution of P waves at seismic arrays. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **77**(1): 195-211.
- Deregowski, S. M., (1971). Optimum digital filtering and inverse filtering in the frequency domain. *Geophysical Prospecting*, **19**: 729-768.
- Donoho, D., (1981). On minimum entropy deconvolution. *Applied Time Series Analysis II*, Academic Press: 656-608.

- Eisner, E., (1984). Tutorial minimum phase for continuous time and discrete time functions. *Geophysical Prospecting*, **32**: 533-541.
- Ellender, S. A., (1986). Consideration in estimating the minimum phase properties of sampled data. *Geophysical Prospecting*, **34**: 1200-1212.
- Fehler, M., M. Hoshiba, H. Sato and K. Obara, (1992). Separation of scattering and intrinsic attenuation for the Kanto-Tokai region, Japan, using measurement of S-wave energy versus hypocentral distance. *Geophysical Journal International*, **108**: 787-800.
- Fehler, M. and H. Sato, (2003). Coda. *Pure and applied geophysics*, **160**(3-4): 541-554.
- Ferber, R.-G., (1988). Time-domain computation of non-normal incidence wavefields in plane layered media. *Geophysical Prospecting*, **36**: 857-877.
- Fleury, G., (1994). Reconstruction de profils de vitesse à partir de données lacunaires et optimisation d'instrument - Application à la débitmétrie ultrasonore. *Thèse: Service des mesures de l'Ecole Supérieure d'Electricité, Université de Paris XI, Orsay*, **273** pages
- Fleury, G., (2000). *Analyse spectrale - Approche non paramétrique et paramétrique*. Gif-sur-Yvette, Supelec.
- Frankel, A. and R. W. Clayton, (1986). Finite Difference Simulations of Seismic Scattering: Implications for the Propagation of Short-Period Seismic Waves in the Crust and Models of Crustal Heterogeneity. *Journal of geophysical research*, **91**(B6): 6465-6489.
- Frankel, A., J. Fletcher, F. Vernon, L. Haar, J. Berger, T. Hanks and J. Brune, N., (1986). Rupture Characteristics and Tomographic Source Imaging of M_l~3 Earthquakes Near Anza, Southern California. *Journal of geophysical research*, **91**(B12): 12,633-612,650.
- Frasier, C. W., (1970). Discrete time solution of plane P-SV waves in a plane layered medium. *Geophysics*, **35**(2): 197-219.
- Friedman, B. (1945). Bubble periods. Conference proceedings, *NDRC Applied Mathematics Panel*.
- Furumura, T. and K. Koketsu, (1998). Specific distribution of ground motion during the 1995 Kobe earthquake and its generation mechanism. *Geophysical Research Letters*, **25**(6): 785-788.
- Giannakis, G. B., (1987). Cumulants: a powerful tool in signal processing. *Proceedings Letters*, **75**(9): 1333-1334.
- Goupillaud, P., (1961). An approach to inverse filtering of near-surface layer effects from seismic records. *Geophysics*, **26**(6): 754-760.
- Guinin, D., F. Aubonnet and J. B., (1993). *Précis de mathématiques - Algèbres 1*. Rosny, Bréal.

- Gurrola, H., E. G. Baker and B. J. Minster, (1995). Simultaneous time-domain deconvolution with application to the computation of receiver functions. *Geophysical Journal International*, **120**: 537-543.
- Hanks, T. and M. Wyss, (1972). The use of body-wave spectra in the determination of seismic-source parameters. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **62**(2): 561-589.
- Hartzell, S. H., (1978). Earthquake aftershocks as Green's functions. *Geophysical Research Letters*, **5**(1): 1-4.
- Hartzell, S. H. and T. H. Heaton, (1983). Inversion of strong-ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **73**: 1553-1583.
- Haskell, N. A., (1966). Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **56**: 125-140.
- Herrmann, R. B., (1980). Q estimates using the coda of local earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **70**(2): 447-468.
- Hirasawa, T. and W. Stauder, (1965). On the seismic body waves from a finite moving source. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **55**: 1811-1842.
- Hoshiaba, M., (1993). Separation of scattering attenuation and intrinsic absorption in Japan using the multiple lapse time window analysis of full seismogram envelope. *Journal of geophysical research*, **98**: 15809-15824.
- Hutchings, L. and F. Wu, (1990). Empirical Green's Functions From Small Earthquakes: A Waveform Study of Locally Recorded Aftershocks of the 1971 San Fernando Earthquake. *Journal of geophysical research*, **95**(B2): 1187-1214.
- Jin, A. and K. Aki, (1989). Spatial and temporal correlation between coda Q^{-1} and seismicity and its physical mechanism. *Journal of geophysical research*, **94**: 14041-14059.
- Kailath, T., (1980). *Linear systems*. Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall.
- Kanamori, H. and D. L. Anderson, (1975). Theoretical basis of some empirical relations in seismology. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **65**(5): 1073-1095.
- Kay, S. M., (1988). *Modern spectral estimation: Theory and application*. New Jersey, Prentice Hall.
- Keller, J. B. and I. I. Kolodner, (1956). Damping of underwater explosion bubble oscillations. *Journal of applied physics*, **27**(10): 1152-1161.
- Kijko, A. and B. J. Mitchell, (1983). Multimode rayleigh wave attenuation and Q_β in the crust of the barents shelf. *Journal of geophysical research*, **88**(B4): 3315-3328.

- Kikuchi, M. and M. Ishida, (1993). Source Retrieval for Deep Local Earthquakes with Broadband Records. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **83**(6): 1855-1870.
- Kolmogorov, A. N., (1941). Interpolation und Extrapolation von Stationären Zufälligen Folgen. *Bull. Acad. Sci. USSR Ser. Math*, **5**: 3-14.
- Koper, K. D., T. C. Wallace, S. R. Taylor and H. E. Hartse, (2001). Forensic Seismology and Sinking of the Kursk. *EOS*, **82**(4): 39,45-46.
- Koyanagi, S., K. Mayeda and K. Aki, (1992). Frequency-dependent site amplification factors using the S-wave coda for the island of Hawaii. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **82**(1151-1185).
- Kunetz, G. and I. D'Erceville, (1962). Sur certaines propriétés d'une onde acoustique plane de compression dans un milieu stratifié. *Annales de Géophysique*, **18**(4): 351-359.
- Lacombe, C., M. Campillo, A. Paul and L. Margerin, (2003). Separation of intrinsic absorption and scattering attenuation from Lg coda decay in central France using acoustic radiative transfer theory. *Geophysical Journal International*, **154**: 417-425.
- Lacoume, J.-L., P.-O. Amblard and P. Comon, (1997). *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Paris, Masson.
- Langston, C. A., (1979). Structure under Mount Rainer, Washington, inferred from teleseismic body waves. *Journal of geophysical research*, **84**: 4749-4762.
- Lazear, G. D., (1993). Mixed-phase wavelet estimation using fourth-order cumulants. *Geophysics*, **58**(7): 1042-1051.
- Le Roux, J., P. Solé, A. M. Tekalp and A. T. Erdem, (1993). Tekalp-Erdem estimator gives the LS estimate for Fourier Phase and Log-Fourier modulus. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**(4): 1705-1707.
- Lermo, J. and F. J. Chavez-Garcia, (1993). Site effect evaluation using spectral ratios with only one station. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **83**(5): 1574-1594.
- Levinson, N., (1947). The Wiener (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and prediction. *J. Math. Phys.*, **25**: 147-169.
- Lii, K. S. and M. Rosenblatt, (1982). Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-Gaussian linear processes. *Ann. Statist.*, **10**: 1195-1208.
- Ljung, L., (1999). *System identification: Theory for the user*. Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall.
- Longbottom, J., A. T. Walden and R. E. White, (1988). Principles and application of maximum kurtosis phase estimation. *Geophysical Prospecting*, **36**(115-138).
- Madariaga, R., (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**(3): 639-666.

- Mansar, S., (1997). Déconvolution sismique: approches déterministe et statistiques. *Thèse: Institut National Polytechnique de Grenoble*, Grenoble, pages
- Mari, J.-L., F. Glangeaud and F. Coppens, (1997). *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*. Paris, Editions Technip.
- Marple, S. L., (1987). *Digital Spectral Analysis with Applications*. New Jersey, Prentice Hall.
- Matsuoka, T. and T. J. Ulrych, (1984). Phase estimation using the bispectrum. *Proceedings of the IEEE*, **72**(10): 1403-1411.
- Max, J. and J.-L. Lacoume, (1996). *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Paris, Masson.
- Mayeda, K., K. S. and K. Aki, (1991a). Site amplifications from S-wave coda in the LongValley caldera region, California. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **81**: 2194-2213.
- Mayeda, K., F. Su and K. Aki, (1991b). Seismic albedo from the total seismic energy dependence on hypocentral distance in southern California. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **67**: 104-114.
- Mendel, J. M., (1991). Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications. *Proceedings of the IEEE*, **79**(3): 277-305.
- Mitchell, A. R. and W. D. Stokes, (1986). Sampling and Minimum Phase from both a Continuous and Discrete Point of View. *Geophysical Prospecting*, **34**: 807-821.
- Mueller, C. S., (1985). Source pulse enhancement by deconvolution of an empirical Green's function. *Geophysical Research Letters*, **12**(1): 33-36.
- Mueller, S., E. Peterschmitt, K. Fuchs, D. Emter and J. Ansorge, (1973). Crustal structure of the Rhinegraben area. *Tectonophysics*, **20**: 381-391.
- Nakamura, Y., (1989). A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *QR of RTRI*, **30**(1): 25-33.
- Nikias, C. L. and A. P. Petropulu, (1993). *Higher-order spectra analysis*, PTR Prentice-Hall.
- Nikias, C. L. and M. R. Raghuveer, (1987). Bispectrum estimation: a digital signal processing framework. *Proceedings of the IEEE*, **75**(7): 869-891.
- O'Dowd, R. J., (1990). Ill-conditioning and pre-whitening in seismic deconvolution. *Geophysical Journal International*, **101**: 489-491.
- Oldenburg, D. W., (1981). A comprehensive solution to the linear deconvolution problem. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **65**: 331-357.
- Oldenburg, D. W., (1982). Multichannel appraisal deconvolution. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **69**: 405-414.

- Oldenburg, D. W., S. Levy and K. P. Whittall, (1981). Wavelet estimation and deconvolution. *Geophysics*, **46**(11): 1528-1542.
- Olson, A. H. and R. J. Aspel, (1982). Finite faults and inverse theory with applications to the 1979 Imperial Valley earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **72**: 1969-2001.
- Oppenheim, A. V. and R. W. Schaffer, (1975). *Digital signal processing*. International editions, Prentice Hall.
- Peacock, K. L. and S. Treitel, (1969). Predictive deconvolution: theory and practice. *Geophysics*, **34**(2): 155-169.
- Perrier, G. and J. C. Ruegg, (1973). Structure profonde du Massif Central Français. *Annales de Géophysique*, **29**: 435-502.
- Petit, R., (1995). *L'outil Mathématique*. Paris, Masson.
- Pflug, L. A., G. E. Loup, J. W. Loup and R. L. Field, (1992). Properties of higher-order correlations and spectra for bandlimited, deterministic transients. *Journal of the Acoustical Society of America*, **91**(2): 975-988.
- Phillips, W. S. and K. Aki, (1986). Site amplification of coda waves from local earthquake in central california. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **76**(3): 627-648.
- Picinbono, B. (1991). Geometrical concepts in higher-order statistics. *Higher-Order-Statistics.-Proceedings-of-the-International-Signal-Processing-Workshop.*, Chamrousse, Lacoume, J. L.
- Picinbono, B., (1998). *Signaux et systèmes linéaires*. Paris, Ellipses.
- Quatieri, T. F. and A. V. Oppenheim, (1981). Iterative Techniques for Minimum Phase Signal Reconstruction from Phase or Magnitude. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **ASSP-29**(6): 1187-1193.
- Rautian, T. G. and V. I. Khalturin, (1978). The use of the coda for determination of the earthquake source spectrum. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **68**(4): 923-948.
- Robinson, E. A., (1954). Predictive decomposition of time series with applications to seismic exploration. *Thèse: MIT*, Cambridge, pages
- Robinson, E. A., (1957). Predictive decomposition of seismic traces. *Geophysics*, **22**(4): 767-778.
- Robinson, E. A., (1967). Predictive decomposition of time series with application to seismic exploration. *Geophysics*, **32**(3): 418-484.
- Robinson, E. A. and S. Treitel, (1967). Principles of digital wiener filtering. *Geophysical Prospecting*.

- Sato, H., (1977). Energy propagation including scattering effect: single isotropic scattering approximation. *Journal of Physics of the Earth*, **25**: 27-41.
- Sato, H., (1984). Attenuation and Envelope Formation of Three-Component Seismograms of Small Local Earthquakes in Randomly Inhomogeneous Lithosphere. *Journal of geophysical research*, **89**(B2): 1221-1241.
- Sato, H. and M. Fehler, (1998). *Seismic Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth*. New York, AIP Press/Springer Verlag.
- Sato, H., M. Fehler and R.-S. Wu, (2002). Scattering and attenuation of seismic waves in the lithosphere. *International Handbook of Earthquake & Engineering Seismology, Part A*. W. H. K. Lee, H. Kanamori, P. Jennings and C. Kisslinger. New York, Academic Press.
- Sato, H., H. Nakahara and M. Ohtake, (1997). Synthesis of scattered energy density for nonspherical radiation from a point shear dislocation source based on the radiative transfert theory. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **104**: 1-14.
- Sato, T. and T. Hirasawa, (1973). Body wave spectra from propagating shear cracks. *Journal of Physics of the Earth*, **21**: 415-431.
- Savage, B. and D. V. Helmberger, (2001). Kursk Explosion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **91**(4): 753-759.
- Savage, J. C., (1972). Relation of Corner Frequency to Faults Dimensions. *Journal of geophysical research*, **77**(10): 3788-3795.
- Scherbaum, F., (1990). Combined Inversion for the Three-Dimensional Q Structure and Source Parameters Using Microearthquake. *Journal of geophysical research*, **95**(B8): 12,423-412,438.
- Scherbaum, F., (1996). *Of poles and zeros, fundamentals of digital seismology*. Dordrecht, Kluwer academic publishers.
- Schuster, A., (1898). On the investigation of hidden periodicities with applications to a supposed twenty-six-day period of meteorological phenomenon. *Terr. Mag.*, **3**: 13-41.
- Shalvi, O. and E. Weinstein, (1990). New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems (channels). *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**(2): 312-321.
- Shannon, C. E., (1949). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, **37**(1): 10-21.
- Shannon, C. E., (1998). Classic paper: Communication in presence of noise. *Proceedings of the IEEE*, **86**(2): 447-457.
- Sherwood, J. W. C. and A. W. Trorey, (1965). Minimum-phase and related properties of the response of a horizontally stratified absorptive earth to plane acoustic waves. *Geophysics*, **30**(2): 191-197.

- Shiomi, K., H. Sato and M. Ohtake, (1997). Broad-band power-law spectra of well-log data in Japan. *Geophysical Journal International*, **130**: 57-64.
- Silvia, M. T. and E. A. Robinson, (1978). Use the kepstrum in signal analysis. *Geoexploration*, **16**: 55-73.
- Silvia, M. T. and E. A. Robinson, (1979). *Deconvolution of geophysical time series in the exploration for oil and natural gas*.
- Singh, S. K. and R. B. Herrmann, (1983). Regionalization of crustal coda Q in the continental United States. *Journal of geophysical research*, **88**: 527-538.
- Singh, S. K., J. Lermo, T. Dominguez, M. Ordaz, E. Espinosa, E. Mena and R. Quass, (1988). The Mexico earthquake of September 19, 1985 - A study of amplification of seismic waves in the valley of Mexico with respect to a hill zone site. *Earthquake Spectra*, **4**: 653-673.
- Slepian, D., (1976). On Bandwidth. *Proceedings of the IEEE*: 292-300.
- Spikin, S. A. and A. Lerner-Lam, (1992). Pulse-shape distortion introduced by broadband deconvolution. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **82**(1): 238-258.
- Tikhonov, A. and V. Arsenin, (1977). *Méthodes de résolution des problèmes mal posés*. Moscou, Editions Mir.
- Toksöz, M. N., A. M. Dainty and E. E. Charrette, (1991). Coherency for ground motion at regional distances and scattering. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **67**: 162-179.
- Tong, L. and S. Perreau, (1998). Multichannel blind identification: from subspace to maximum likelihood methods. *Proceedings of the IEEE*, **86**(10): 1951-1968.
- Treitel, S. and E. A. Robinson, (1966). Seismic wave propagation in layered media in terms of communication theory. *Geophysics*, **31**(1): 17-32.
- Truchetet, F., (1998). *Traitement linéaire du signal numérique*. Paris, Hermes.
- Tugnait, J. K., (1987). Identification of Linear Stochastic Systems via Second-and Fourth-Order Cumulant Matching. *IEEE Transactions on Information Theory*, **33**(3): 393-407.
- Tugnait, J. K., L. Tong and Z. Ding, (2000). Single-User Channel Estimation and Equalization. *IEEE Signal Processing Magazine*(May): 17-28.
- Unser, M., (2000). Sampling-50 years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, **88**(4): 567-587.
- Vallée, M. and M. Bouchon, (2003). The 13 January 2001 El Salvador earthquake: A multidata analysis. *Journal of geophysical research*, **108**(B4): NIL_25-NIL_44.
- Villemin, T., F. Alvarez and J. Angelier, (1986). The Rhinegraben: extension, subsidence and shoulder uplift. *Tectonophysics*, **128**: 47-59.

- Walden, A. T., (1985). Non-gaussian reflectivity, entropy, and deconvolution. *Geophysics*, **50**(12): 2862-2888.
- Wallace, T. C., D. V. Helmberger and G. R. Mellman, (1981). A Technique for the Inversion of Regional Data in Source Parameter Studies. *Journal of geophysical research*, **86**(B3): 1679-1685.
- Welch, P. D., (1967). The use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short Modified Periodograms. *IEEE Transactions on Audio Electroacoustic*, **15**: 70-73.
- Wesley, J. P., (1965). Diffusion of seismic energy in the near range. *Journal of geophysical research*, **70**: 5099-5106.
- White, R. E., (1988). Maximum kurtosis phase correction. *Geophysical Journal*, **95**(2): 371-389.
- Wielandt, E., (1975). Generation of seismic waves by underwater explosions. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **40**: 421-439.
- Wiener, N., (1949). *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationary Time Series, with Engineering Applications*. New York, Technology Press and Wiley.
- Wiggins, R., (1978). Minimum entropy deconvolution. *Geoexploration*, **16**: 21-35.
- Wold, H., (1954). *A study in the analysis of stationary time series*. Stockholm, Almqvist & Wiksell.
- Wood, L. C. and S. Treitel, (1975). Seismic Signal Processing. *Proceedings of the IEEE*, **63**(4): 649-661.
- Wu, R.-S., (1985). Multiple scattering and energy transfert of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation - I Theoretical modeling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **82**: 57-80.
- Wu, R.-S., Z. Xu and X.-P. Li, (1994). Heterogeneity spectrum and scale-anisotropy in the upper crust revealed by the German Continental Deep-Drilling (KTB) Holes. *Geophysical Research Letters*, **21**(10): 911-914.
- Xu, G., H. Lui, L. Tong and T. Kailath, (1995). A least-squares approach to blind-channel identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43**(12): 2982-2993.
- Zeng, Y., F. Su and K. Aki, (1991). Scattering wave energy propagation in a random isotropic scattering medium 1. Theory. *Journal of geophysical research*, **96**: 607-619.
- Zollo, A., P. Capuano and S. K. Singh, (1995). Use Small Earthquakes Records to Determine the Source Time Functions of Larger Earthquakes: a Alternative Method and an Application. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **85**(4): 1249-1256.